

MEM 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 3

25/2/2020

Άσκηση 3.1 Βρείτε ένα διάνυσμα x ορθογώνιο στο χώρο γραμμών του A , ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο χώρο στηλών, και ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο μηδενικό χώρο του πίνακα A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.2 Βρείτε όλα τα διανύσματα του \mathbb{R}^3 που είναι ορθογώνια στο $(1, 1, 1)$ και στο $(1, -1, 0)$.

Άσκηση 3.3 Βρείτε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος γραμμών περιέχει το $(1, 2, 1)$ και ο μηδενικό χώρος περιέχει το $(1, -2, 1)$, ή δείξτε ότι δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας.

Άσκηση 3.4 Κατασκευάστε μία ομογενή εξίσωση σε τρεις αγνώστους, της οποίας οι λύσεις είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $(1, 1, 2)$ και $(1, 2, 3)$. Αυτό είναι το αντίστροφο της προηγούμενης άσκησης, αλλά τα δύο προβλήματα είναι ουσιαστικά τα ίδια.

Άσκηση 3.5 Βρείτε την προβολή του διανύσματος $(7, 4)$ πάνω στον υπόχωρο που παράγεται από το διάνυσμα $(1, 2)$.

Άσκηση 3.6 Βρείτε τον πίνακα προβολής που αντιστοιχεί στην προβολή των διανυσμάτων του επιπέδου \mathbb{R}^2 πάνω στην ευθεία $3x - 2y = 0$.

Άσκηση 3.7 Βρείτε τη βέλτιστη λύση ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης $Ax = b$, και υπολογίστε την προβολή $p = A\hat{x}$, εάν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Επαληθεύστε ότι το διανυσματικό σφάλμα $e = b - p$ είναι ορθογώνιο στις στήλες του A .

Άσκηση 3.8 Θεωρούμε τον διανυσματικό υπόχωρο V του \mathbb{R}^4 που παράγεται από τα διανύσματα

$$(1, 2, 0, 3), \quad (2, 1, 1, 2) \quad (-1, 4, -2, 5)$$

α'. Βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα V^\perp του V .

β'. Γράψτε το διάνυσμα $x = (-4, 15, 7, 8)$ ως άθροισμα $x = v + w$, όπου $v \in V$ και $w \in V^\perp$.

Άσκηση 3.9 Γνωρίζουμε ότι οι τιμές μιας ποσότητας y που παριστάνει ένα φυσικό μέγεθος υπόκεινται σε γραμμική μεταβολή ως προς τις τιμές μιας συνεχούς μεταβλητής x . Σε ένα πείραμα υπολογισμού της εξίσωσης που παριστά την εν λόγω μεταβολή, μετρήθηκαν τα ζεύγη τιμών: $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων υπολογίστε τους συντελεστές a και b της εξίσωσης $y = ax + b$ που παριστά το νόμο μεταβολής της ποσότητας y . Βρείτε το διάνυσμα λάθους που προκύπτει από τη λύση ελαχίστων τετραγώνων και δείξτε ότι αυτό είναι ορθογώνιο στο χώρο των στηλών του πίνακα A που θα κατασκευάσετε για να λύσετε το πρόβλημα.

Άσκηση 3.10 Αποδείξτε ότι η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύση εάν και μόνον εάν $y^T b = 0$ για κάθε y που ικανοποιεί $y^T A = 0$.

Άσκηση 3.11 Βρείτε τον πίνακα προβολής P_1 στην ευθεία με διεύθυνση $a = (1, 3)$, καθώς και τον πίνακα προβολής P_2 στην ευθεία που είναι κάθετη στο a . Υπολογίστε τους πίνακες $P_1 + P_2$ και $P_1 P_2$. Εξηγήστε το αποτέλεσμα.