ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Υπόδειγμα Θεμάτων

Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Παρατηρήσεις

1. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ να έχετε ΚΙΝΗΤΑ ή ΚΟΜΠΙΟΥΤΕΡΑΚΙΑ στο χώρο της εξέτασης. Σύμφωνα με τον κανονισμό του Τμήματος εάν κατά τη διάρκεια της εξέτασης έχετε πάνω ή δίπλα σας, τσάντες, σημειώσεις, βιβλία, κινητό (έστω και απενεργοποιημένο) ή άλλη ηλεκτρονική συσκευή, αποκλείεστε από όλες τις εξετάσεις της πρώτης εξεταστικής περιόδου του επόμενου εξαμήνου.

2. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες.

3. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).

4. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε και να επιδείξετε πάσο ή ταυτότητα.

5. Η εξέταση διαρκεί 150 λεπτά. Τα πρώτα 30 λεπτά της εξέτασης απαγορεύεται η έξοδος ή η αποχώρηση από την εξέταση.

6. Οι βαθμοί δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 100.

ΘΕΜΑ Α. (50) Δίδεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

α′. Παραγοντοποιήστε τον πίνακα A στη μορφή PLU, όπου P είναι πίνακας μετάθεσης, L είναι κάτω τριγωνικός και U είναι κλιμακωτός πίνακας.

β′. Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης $Ax = 0$.

γ′. Βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί το διάνυσμα $b = (b_1, b_2, b_3)$, ώστε να έχει λύσεις η εξίσωση $Ax = b$.

δ′. Επιλέξτε b_1 τέτοιο ώστε $Ax = b$ να έχει λύση για το διάνυσμα $b = (b_1, 1, 2)$, και υπολογίστε όλες τις λύσεις.

ε′. Βρείτε βάσεις για το μηδενόχωρο, το χώρο στηλών και το χώρο γραμμών του πίνακα A.

ϛ′. Ποιά είναι η τάξη του πίνακα A; Είναι ο πίνακας AA^T αντιστρέψιμος; Είναι ο πίνακας A^TA αντιστρέψιμος;

ΘΕΜΑ Β. (10)
Για ποιά τιμή του s υπάρχει γραμμική απεικόνιση που απεικονίζει το $(1,\,0)$ στο $(3,\,2,\,1)$, το $(0,\,1)$ στο $(1,\,1,\,s)$ και το $(-1,\,2)$ στο $(-1,\,0,\,5)$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ Γ. (15)
Δίδεται το σύνολο $X = \{x_1,\, x_2,\, x_3\}$ και το σύνολο $\mathbb{R}^X$ όλων των πραγματικών συναρτήσεων $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Για $f,\, g \in \mathbb{R}^X$ και $a \in \mathbb{R}$, ορίζουμε τις πράξεις $f \dot{+} g$ και $a \cdot f$ με

$$(f \dot{+} g)(u) = f(u) + g(u)\,, \quad (a \cdot f)(u) = af(u)\,, \quad \text{για κάθε } u \in X\,.$$

α′. Δείξτε οτι $\mathbb{R}^X$ με τις πράξεις $\dot{+}$ και $\cdot$ ικανοποιεί τα αξιώματα ενός διανυσματικού χώρου.
β′. Δείξτε οτι οι συναρτήσεις f_1, f_2, f_3, που ορίζονται από

$$f_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{εάν } i \neq j\,, \\ 1 & \text{εάν } i = j\,, \end{cases}$$

αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^X$.

ΘΕΜΑ Δ. (10)
Βρείτε μία γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}[x]_4 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_2$ (όπου $\mathbb{R}[x]_k$ είναι ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ k), τέτοια ώστε $\operatorname{im} L = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_2 : p(1) = 0\}$.

ΘΕΜΑ Ε. (25)
Στο χώρο $\mathcal{M}(2,\,\mathbb{R})$ των 2×2 πινάκων, θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

α′. Βρείτε τον πίνακα A που έχει διάνυσμα συντεταγμένων ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ το

$$(2,\,3,\,-1,\,1)\,.$$

β′. Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του πίνακα $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

γ′. Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $M : \mathcal{M}(2,\,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(2,\,\mathbb{R})$ για την οποία

$$M\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τον πίνακα της απεικόνισης M ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.