ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Υπόδειγμα Θεμάτων
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Παρατηρήσεις

1. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ να έχετε ΚΙΝΗΤΑ ή ΚΟΜΠΙΟΥΤΕΡΑΚΙΑ στο χώρο της εξέτασης. Σύμφωνα με τον κανονισμό του Τμήματος εάν κατά τη διάρκεια της εξέτασης έχετε πάνω ή δίπλα σας, τσάντες, σημειώσεις, βιβλία, κινητό (έστω και απενεργοποιημένο) ή άλλη ηλεκτρονική συσκευή, αποκλείεστε από όλες τις εξετάσεις της πρώτης εξεταστικής περιόδου του επόμενου εξαμήνου.
2. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες.
3. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
4. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε και να επιδείξετε πάσο ή ταυτότητα.
5. Η εξέταση διαρκεί 150 λεπτά. Τα πρώτα 30 λεπτά της εξέτασης απαγορεύεται η έξοδος ή η αποχώρηση από την εξέταση.
6. Οι βαθμοί δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 100.

ΘΕΜΑ Α. (50) Δίδεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

α΄. Παραγοντοποιήστε τον πίνακα A στη μορφή PLU, όπου P είναι πίνακας μετάθεσης, L είναι κάτω τριγωνικός και U είναι κλιμακωτός πίνακας.

β΄. Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης $Ax = 0$.

γ΄. Βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί το διάνυσμα $b = (b_1, b_2, b_3)$, ώστε να έχει λύσεις η εξίσωση $Ax = b$.

δ΄. Επιλέξτε b_1 τέτοιο ώστε $Ax = b$ να έχει λύση για το διάνυσμα $b = (b_1, 1, 2)$, και υπολογίστε όλες τις λύσεις.

ε΄. Βρείτε βάσεις για το μηδενόχωρο, το χώρο στηλών και το χώρο γραμμών του πίνακα A.

ϛ΄. Ποιά είναι η τάξη του πίνακα A; Είναι ο πίνακας AA^T αντιστρέψιμος; Είναι ο πίνακας $A^T A$ αντιστρέψιμος;

Απάντηση - Υπόδειξη.
Για να απαντήσουμε στα ερωτήματα θα χρειαστεί να εφαρμόσουμε απαλοιφή Gauss στο επαυξημένο πίνακα $[A\vdots b]$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & b_1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & b_2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & b_3 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_3+2b_2 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3+2b_2-b_1 \end{bmatrix}$$

α΄. Κατά την απαλοιφή, κάναμε εναλλαγή των δύο πρώτων γραμμών, κατόπιν προσθέσαμε δύο φορές την πρώτη γραμμή στην τρίτη, και τέλος αφαιρέσαμε τη δεύτερη γραμμή από την τρίτη.

$$\begin{aligned} U &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= L^{-1}P^{-1}A\,. \end{aligned}$$

Άρα $A = PLU$, όπου $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

β΄. Οι λύσεις της εξίσωσης $Ax = 0$ ειναι οι ίδιες με τις λύσεις της εξίσωσης $Ux = 0$. Εάν $x = (u, v, z, w)$, επιλέγουμε ως ελεύθερες μεταβλητές τις v και w, και οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ z \\ w \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

γ΄. Αφού η τρίτη γραμμή του πίνακα U είναι μηδέν, το διάνυσμα $b = (b_1, b_2, b_3)$ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $b_3 + 2b_2 - b_1 = 0$.

δ΄. Για να ικανοποιείται η σχέση $b_3 + 2b_2 - b_1 = 0$, θέτουμε $b_1 = 4$. Οι λύσεις της $Ax = b$ είναι οι ίδιες με τις λύσεις της

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Μία ειδική λύση είναι $(u, v, z, w) = (3, 0, 4, 0)$, και η γενική λύση είναι

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ε΄. Βάση του μηδενόχωρου

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Βάση του χώρου γραμμών

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

ϛ΄. Ο πίνακας A έχει τάξη 2.
Ο πίνακας AA^T είναι 3×3 και έχει τάξη ≤ 2, άρα δεν είναι αντιστρέψιμος.
Ο πίνακας $A^T A$ είναι 4×4 και έχει τάξη ≤ 2, άρα δεν είναι αντιστρέψιμος.

ΘΕΜΑ Β. (10)
Για ποιά τιμή του s υπάρχει γραμμική απεικόνιση που απεικονίζει το $(1, 0)$ στο $(3, 2, 1)$, το $(0, 1)$ στο $(1, 1, s)$ και το $(-1, 2)$ στο $(-1, 0, 5)$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Τα διανύσματα $(1, 0)$, $(0, 1)$ και $(-1, 2)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα: $(-1, 2) = -(1, 0) + 2(0, 1)$. Άρα οι εικόνες μέσω μίας γραμμικής απεικόνισης πρέπει να ικανοποιούν την ίδια σχέση:

$$(-1, 0, 5) = -(3, 2, 1) + 2(1, 1, s).$$

Συνεπώς s πρέπει να είναι 3.

ΘΕΜΑ Γ. (15)
Δίδεται το σύνολο $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ και το σύνολο $\mathbb{R}^X$ όλων των πραγματικών συναρτήσεων $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Για $f, g \in \mathbb{R}^X$ και $a \in \mathbb{R}$, ορίζουμε τις πράξεις $f \dotplus g$ και $a \cdot f$ με

$$(f \dotplus g)(u) = f(u) + g(u), \quad (a \cdot f)(u) = af(u), \quad \text{για κάθε } u \in X.$$

α΄. Δείξτε οτι $\mathbb{R}^X$ με τις πράξεις $+$ και $\cdot$ ικανοποιεί τα αξιώματα ενός διανυσματικού χώρου.
β΄. Δείξτε οτι οι συναρτήσεις f_1, f_2, f_3, που ορίζονται από

$$f_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{εάν } i \neq j\,, \\ 1 & \text{εάν } i = j\,, \end{cases}$$

αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^X$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
α΄. Δείξτε οτι οι πράξεις ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες ΔΧ1 έως ΔΧ8.
β΄ Κάθε συνάρτηση $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των f_1, f_2 και f_3: για κάθε i, $g(x_i) = \delta_{i1}g(x_1) + \delta_{i2}g(x_2) + \delta_{i3}g(x_3)$. Αφού $f_j(x_i) = \delta_{ij}$,

$$g = g(x_1)\cdot f_1 + g(x_2)\cdot f_2 + g(x_3)\cdot f_3\,.$$

ΘΕΜΑ Δ. (10)
Βρείτε μία γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}[x]_4 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_2$ (όπου $\mathbb{R}[x]_k$ είναι ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ k), τέτοια ώστε $\operatorname{im} L = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_2 : p(1) = 0\}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Τα στοιχεία του $\{p(x) \in \mathbb{R}[x]_2 : p(1) = 0\}$ είναι πολυώνυμα της μορφής $(x-1)(sx+t)$. Για να ορίζει η αντιστοίχιση $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mapsto (x-1)(sx+t)$ μία γραμμική απεικόνιση, αρκεί τα s, t να είναι γραμμικές συναρτήσεις των $a_0 \ldots, a_4$. Για παράδειγμα, $s = a_1$ και $t = a_0$.

ΘΕΜΑ Ε. (25)
Στο χώρο $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ των 2×2 πινάκων, θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

α΄. Βρείτε τον πίνακα A που έχει διάνυσμα συντεταγμένων ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ το

$$(2,\, 3,\, -1,\, 1)\,.$$

β΄. Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του πίνακα $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

γ΄. Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $M : \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ για την οποία

$$M\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τον πίνακα της απεικόνισης M ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
α΄. Ο πίνακας A που έχει διάνυσμα συντεταγμένων $(2,\, 3,\, -1,\, 1)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι ο

$$A = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

β′. Το διάνυσμα συντεταγμένων $(a,\, b,\, c,\, d)$ του πίνακα B δίδεται από τη σχέση

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η σχέση δίδει ένα σύστημα 4 εξισώσεων, απ' όπου βρίσκουμε $(a,\, b,\, c,\, d) = (2,\, 1,\, -1,\, 2)$.
γ′. Πρώτα υπολογίζουμε την απεικόνιση M:

$$M\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-b & -a+b \\ c-d & -c+d \end{bmatrix}.$$

Εάν B_j είναι το j διάνυσμα της διατεταγμένης βάσης $\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} M(B_1) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ M(B_2) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ M(B_3) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ M(B_4) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ο πίνακας $C = {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}$ της M ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ έχει στην j στήλη το διάνυσμα συντεταγμένων του $M(B_j)$ ως προς τη $\mathcal{B}$. Άρα η πρώτη στήλη του C δίδεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} M(B_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} &= c_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_{21} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + c_{31} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_{41} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

απ' όπου βρίσκουμε $c_{11} = 1$, $c_{21} = 0$, $c_{31} = -1$ και $c_{41} = 1$. Παρόμοια υπολογίζουμε τις άλλες 3 στήλες.

Εναλλακτικά, για τα β′ και γ′ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα μετάβασης ${}_{\mathcal{E}}\mathbf{I}_{\mathcal{B}}$, από τη βάση $\mathcal{B}$ στην κανονική βάση του $\mathcal{M}(2,\, \mathbb{R})$,

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Αυτός είναι ο 4×4 πίνακας D που έχει στη στήλη j το διάνυσμα συντεταγμένων του B_j ως προς τη βάση $\mathcal{E}$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Για το β′, το διάνυσμα $(a,\, b,\, c,\, d)$ δίδεται από την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Για το γ′, βρίσκουμε τον πίνακα F της M ως προς τη βάση $\mathcal{E}$,

$$F = {}_{\mathcal{E}}M_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο της αλλαγής βάσης

$$C = {}_{\mathcal{B}}\mathbf{I}_{\mathcal{E}}\,{}_{\mathcal{E}}M_{\mathcal{E}}\,{}_{\mathcal{E}}\mathbf{I}_{\mathcal{B}} = D^{-1}FD\,.$$