

## MEM 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

### Εργαστήριο Προβλημάτων 12

13/5/2020

**Άσκηση 12.1** Θεωρήστε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

α'. Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα  $R$  και διαγώνιο πίνακα  $D$  τέτοιο ώστε  $AR = RD$ .

β'. Υπολογίστε τον πίνακα  $A^k$  για κάθε θετικό ακέραιο  $k$ .

γ'. Λύστε το σύστημα εξισώσεων διαφορών

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 4x_k + 5y_k \\ y_{k+1} &= -x_k - 2y_k \end{aligned}$$

$$\text{με αρχικές συνθήκες } \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Άσκηση 12.2** Να βρεθούν οι οριακές τιμές των  $y_k, z_k, k \rightarrow \infty$  εαν

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 0,8 y_k + 0,3 z_k & y_0 &= 0 \\ z_{k+1} &= 0,2 y_k + 0,7 z_k & z_0 &= 5 \end{aligned}$$

Βρείτε γενικούς τύπους για  $y_k, z_k$ .

**Άσκηση 12.3** Με δεδομένο ότι

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

α'. Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα  $R$  και διαγώνιο πίνακα  $D$  τέτοιο ώστε  $AR = RD$ .

β'. Δίδεται το σύστημα εξισώσεων διαφορών

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - 2y_k - 6z_k \\y_{k+1} &= 2x_k + 5y_k + 6z_k \\z_{k+1} &= -2x_k - 2y_k - 3z_k,\end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες  $x_0 = y_0 = 1$  και  $z_0 = 0$ .

Εκφράστε το διάνυσμα αρχικών συνθηκών  $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων  $v_1, v_2, v_3$ , και λύστε το σύστημα εξισώσεων διαφορών.

**Άσκηση 12.4** Να βρεθούν οι οριακές τιμές των  $y_k, z_k, k \rightarrow \infty$  εαν

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= 0,8 y_k + 0,3 z_k & y_0 &= 0 \\z_{k+1} &= 0,2 y_k + 0,7 z_k & z_0 &= 5\end{aligned}$$

Βρείτε γενικούς τύπους για  $y_k, z_k$ .

**Άσκηση 12.5** Θεωρήστε το σύστημα εξισώσεων διαφορών  $v_{k+1} = Av_k$ , όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad v_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}.$$

Είναι αυτό το σύστημα μία διαδικασία Markov; Είναι μία ομαλή διαδικασία Markov;

Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα  $R$  και διαγώνιο πίνακα  $D$  τέτοιους ώστε  $AR = RD$ .

Υποθέστε ότι το σύστημα παριστάνει την κατανομή ενός πληθυσμού 6000 ατόμων, κατανεμημένων σε 3 καταστάσεις, με  $x_k$  τον αριθμό των ατόμων στην κατάσταση 1,  $y_k$  στην κατάσταση 2 και  $z_k$  στην κατάσταση 3. Αρχικά 1000 άτομα βρίσκονται στην κατάσταση 1, 2000 στην κατάσταση 2 και 3000 στην κατάσταση 3. Βρείτε την μακροπρόθεσμη κατανομή του πληθυσμού και τον αριθμό των ατόμων που τελικά θα βρίσκονται σε κάθε μία κατάσταση. (Δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσετε τον πίνακα  $R^{-1}$ .)

**Άσκηση 12.6** Για ποιες τιμές των  $\alpha, \beta$  είναι η παρακάτω εξίσωση μια διαδικασία Markov;

$$u_{k+1} = Au_k = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 - \alpha & 1 - \beta \end{bmatrix} u_k, \quad u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε το  $u_k = S\Lambda^k S^{-1}u_0$ . Για ποιές τιμές των  $\alpha, \beta$  το όριο  $u_k, k \rightarrow \infty$  είναι πεπερασμένο, και ποιό είναι αυτό το όριο.

**Άσκηση 12.7** Η γραφική παράσταση της  $u = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$  είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Προσεγγίζουμε την  $u$  με τις παρακάτω εξισώσεις διαφορών

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= (I + A)u_n \\u_{n+1} &= (I - A)^{-1}u_n \\u_{n+1} &= (I - \frac{1}{2}A)^{-1}(I + \frac{1}{2}A)u_n \\A &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Βρείτε τις ιδιοτιμές των  $I + A$ ,  $(I - A)^{-1}$ ,  $(I - \frac{1}{2}A)^{-1}(I + \frac{1}{2}A)$ . Ποιά είναι η γραφική παράσταση της  $u_n$  για κάθε εξίσωση διαφορών; Για ποιά εξίσωση διαφορών η λύση  $u_n$  είναι ο κύκλος;

**Άσκηση 12.8** Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα της Άσκησης 12.1, για να δείξετε ότι ο αριθμός  $3^k - (-1)^k$  είναι πολλαπλάσιο του 4, για κάθε θετικό ακέραιο  $k$ .