ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Θεόδωρος Κατσαούνης
Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 11

5/5/2020

Οι Ασκήσεις του Φυλλαδίου 11 αφορούν στις Διαλέξεις 20, 21 και 22.

Άσκηση 11.1 Εξετάστε ποιοί από τους παρακάτω πίνακες είναι μοναδιαίοι ή ερμιτιανοί.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2-\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} \sin\vartheta & -\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & \sin\vartheta \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 11.2 Για $n \times n$ μιγαδικούς πίνακες A και B, δείξτε οτι

α′. $\bar{A}^T = \overline{A^T}$

β′. $\det(A^*) = \det(\bar{A}) = \overline{\det A}$

γ′. $(A^*)^* = A$

δ′. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$

ε′. $(A+B)^* = A^* + B^*$

ϛ′. $(AB)^* = B^* A^*$

ζ′. Εάν A είναι αντιστρέψιμος, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Άσκηση 11.3 Για $n \times n$ μοναδιαίους πίνακες A και B, δείξτε οτι

α′. $\bar{A}$, A^T και A^{-1} είναι μοναδιαίοι

β′. Εάν λ είναι ιδιοτιμή του A, $|\lambda| = 1$ και $\frac{1}{\lambda}$ είναι επίσης ιδιοτιμή του A.

γ′. $\det A = 1$

δ′. Οι πίνακες AB και AB^{-1} είναι μοναδιαίοι

Άσκηση 11.4 Βρείτε μοναδιαίο πίνακα με πρώτη γραμμή $\left[\frac{1}{\sqrt{10}}\ 0\ \frac{3}{\sqrt{10}}\right]$.

Άσκηση 11.5 Βρείτε μοναδιαίους πίνακες που διαγωνιοποιούν τους

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3-3\mathrm{i} \\ 3+3\mathrm{i} & 5 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 11.6 Εκφράστε τους ακόλουθους πίνακες ως γραμμικούς συνδυασμούς πινάκων προβολών στους ιδιόχωρους.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 11.7 Εάν A είναι μιγαδικός $n \times n$ πίνακας τέτοιος ώστε $A^* = -A$, δείξτε οτι

α'. Κάθε ιδιοτιμή του A είναι της μορφής $\mathrm{i}\mu$, για $\mu \in \mathbb{R}$.

β'. Ο πίνακας $A + \mathbf{I}_n$ είναι αντιστρέψιμος.

γ'. Ο πίνακας $(\mathbf{I}_n - A)(\mathbf{I}_n + A)^{-1}$ είναι μοναδιαίος.

.

Άσκηση 11.8 Αποδείξτε οτι υπάρχει μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^2$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του $\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ a & 1 \end{bmatrix}$ εάν και μόνον εάν $|a| = 1$.

Άσκηση 11.9 Εξετάστε ποιοί από τις παρακάτω κατηγορίες πινάκων είναι κανονικοί.

α'. Οι ερμιτιανοί πίνακες, $A^* = A$.

β'. Οι μοναδιαίοι πίνακες, $A^*A =$

γ'. Οι αντι-ερμιτιανοί πίνακες, $A^* = -A$.

δ'. Οι συμμετρικοί μιγαδικοί πίνακες, $A = A^T$.

ε'. Οι αντισυμμετρικοί μιγαδικοί πίνακες, $A = -A^T$.

ϛ'. Πίνακες της μορφής $A = BB^*$.

ζ'. Πίνακες της μορφής $A = B + C$, για B και C ερμιτιανούς.

η'. Πίνακες της μορφής $A = BC$, για B και C μοναδιαίους.

ϑ'. Πίνακες που ικανοποιούν τη σχέση $A^*A = -$.

Άσκηση 11.10 Δείξτε οτι εάν A είναι ερμιτιανός $n \times n$, $x \in \mathbb{C}^n$ και υπάρχει k για το οποίο $A^k x = 0$, τότε $Ax = 0$.
Υπόδειξη: Δείξτε με επαγωγή οτι το αποτέλεσμα ισχύει εάν k είναι άρτιος θετικός ακέραιος.