

## MEM 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

### Εργαστήριο Προβλημάτων 10

28/4/2020

**Άσκηση 10.1** Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}^3$ , με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Βρείτε τα  $\langle u, v \rangle$ ,  $\|u\|$ ,  $\|v\|$ , την απόσταση  $d(u, v) = \|u - v\|$  μεταξύ των σημείων που έχουν διάνυσμα θέσης  $u$  και  $v$ , και το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των  $u$  και  $v$ , για τα διανύσματα:

α'.  $u = (3, -2, 1)$  και  $v = (1, -1, 1)$ .

β'.  $u = (1, 0, -2)$ ,  $v = (2, 1, 1)$ .

**Άσκηση 10.2** Θεωρούμε το μιγαδικό διανυσματικό χώρο  $\mathbb{C}^2$ , με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Βρείτε τα  $\langle u, v \rangle$ ,  $\|u\|$ ,  $\|v\|$  και την απόσταση  $d(u, v) = \|u - v\|$ , για τα διανύσματα:

α'.  $u = (2 - i, 3 + 2i)$ ,  $v = (3 - 2i, 2 + i)$ .

β'.  $u = (2 - 3i, -2 + 3i)$ ,  $v = (1, 1)$ .

Σε ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο ορίζεται η έννοια της ορθογωνιότητας, αλλά δεν ορίζεται η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων.

**Άσκηση 10.3** Θεωρούμε διανύσματα  $v = (v_1, v_2)$  και  $w = (w_1, w_2)$  στο  $\mathbb{R}^2$ .

α'. Δείξτε ότι η συνάρτηση  $\langle v, w \rangle = 4v_1w_1 + 9v_2w_2$  ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο  $\mathbb{R}^2$ .

β'. Δείξτε ότι η συνάρτηση  $\langle v, w \rangle = 2v_1w_1 - v_2w_2$  δεν ορίζει εσωτερικό γινόμενο.

**Άσκηση 10.4** Θεωρούμε το χώρο  $C[0, 1]$  των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα  $[0, 1]$ , με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

α'. Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των  $f(x) = 2x + 1$ ,  $g(x) = 3x - 2$ .

β'. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = 4x - 3$  είναι ορθογώνιες.

γ'. Βρείτε μία συνάρτηση ορθογώνια προς την  $f(x) = 6x + 12$

**Άσκηση 10.5** Έστω  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Cauchy–Schwarz για να δείξετε ότι

$$\left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n}\right)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2) \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right).$$

**Άσκηση 10.6** Εξετάστε εάν οι ακόλουθες συναρτήσεις ορίζουν εσωτερικό γινόμενο στο χώρο  $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$  των  $2 \times 2$  πραγματικών πινάκων:

α'.  $\langle A, B \rangle = \det AB,$

β'.  $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} AB,$

γ'.  $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} B^T A.$

**Άσκηση 10.7** Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}^4$  με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, και τον υπόχωρο  $X$  που παράγεται από τα διανύσματα  $u_1 = (1, 1, 0, 0)$  και  $u_2 = (0, 1, -1, 1)$ .

Βρείτε μία ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος  $X^\perp$ , και συμπληρώστε την σε μια ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}^4$ .

**Άσκηση 10.8** Βρείτε μία ορθοκανονική βάση για τον υπόχωρο  $V$  του  $\mathbb{R}^3$ ,

$$V = \{(x, y, z) : 5x - y + 2z = 0\}.$$

Επεκτείνετε τη βάση που βρήκατε σε ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$ .

**Άσκηση 10.9** Έστω  $2 \times 2$  πραγματικός πίνακας  $A$ . Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$\langle x, y \rangle = x^T A y = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο  $\mathbb{R}^2$  εάν και μόνον εάν  $A^T = A$ ,  $\det A > 0$  και  $\operatorname{tr} A > 0$ , (δηλαδή εάν  $b = c$ ,  $ad - b^2 > 0$  και  $a > 0$ ).

**Άσκηση 10.10** Θεωρήστε θετική συνεχή συνάρτηση  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι εάν  $p(x), q(x)$  είναι πολυώνυμα, τότε

$$\langle p, q \rangle_f = \int_0^1 f(t)p(t)q(t)dt,$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο χώρο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές.

Εάν  $f(x) = x + 1$ , βρείτε ορθοκανονική βάση για το χώρο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 1, με το εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ .

**Άσκηση 10.11** Θεωρούμε διανυσματικό χώρο  $V$  πάνω από το  $\mathbb{R}$ , με εσωτερικό γινόμενο, και δύο διαφορετικά διανύσματα  $a, b \in V$ . Αποδείξτε ότι εάν  $x \in V$  και  $\|x - a\| + \|x - b\| = \|a - b\|$ , τότε  $x = \lambda a + \mu b$ , με  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  και  $\lambda + \mu = 1$ .