ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Θεόδωρος Κατσαούνης
Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 9

7/4/2020

Άσκηση 9.1 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

α΄. Δείξτε οτι $A^3 - aA^2 + 2A - I = 0$.

β΄. Δείξτε οτι ο A είναι αντιστρέψιμος και συμπεράνετε από το α΄ τον αντίστροφο πίνακα A^{-1}.

γ΄. Υπολογίστε τον πίνακα $A^5 - aA^4 + A^3 - (1-a)A^2 - A + I$.

Άσκηση 9.2 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε ένα πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού ίσου ή μικρότερου από 1, τέτοιο ώστε $p(A) = 3A^5 + 5A^4 + A$.

Άσκηση 9.3 Αν A είναι 3×3 τετραγωνικός πίνακας, με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) = -x^3 + x$ δείξτε οτι

$$A^n = \begin{cases} A, & \text{εάν } n \text{ περιττός} \\ A^2, & \text{εάν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Άσκηση 9.4 Δείξτε οτι εάν A είναι τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και ικανοποιεί τη σχέση $A^2 + I = 0$, τότε ο A δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Συμπεράνετε οτι δεν υπάρχει 3×3 πραγματικός πίνακας ο οποίος να ικανοποιεί τη σχέση $A^2 + I = 0$.

Άσκηση 9.5 Δείξτε οτι $||x||_\infty = \max\{|x_i| \; : \; i = 1, \ldots, n\}$, για $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ικανοποιεί τα αξιώματα της νόρμας.

Άσκηση 9.6 Δείξτε οτι $||f||_\infty = \max\{|f(x)| \ : \ x \in [a,\, b]\}$, για f συνεχή συνάρτηση στο $[a,\, b]$ ικανοποιεί τα αξιώματα της νόρμας.

Άσκηση 9.7 Σχεδιάστε τη μοναδιαία σφαίρα στους χώρους $\mathbb{R}^2$ με τις νόρμες ℓ^1, ℓ^2 και ℓ^∞.

Άσκηση 9.8 Δείξτε οτι $||x|| = \frac{1}{3}(|x_1| + |x_2|) + \frac{2}{3}\max\{|x_1|,\, |x_2|\}$ ορίζει μία νόρμα στο $\mathbb{R}^2$. Σχεδιάστε τη μοναδιαία σφαίρα ως προς αυτή τη νόρμα.

Άσκηση 9.9 Θεωρούμε τους παρακάτω τριδιαγώνιους $n \times n$ πίνακες

$$A = [1, 4, 1]\,, \qquad B = [-1, 2, -1]\,,$$

(δηλαδή, ο A έχει 4 στην κύρια διαγώνιο και 1 στις συνιστώσες $a_{i,i-1}$ και $a_{i,i+1}$). Βρείτε τα $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_F$ και $\|B\|_1$, $\|B\|_\infty$, $\|B\|_F$.

Υπενθύμιση: $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$, $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ και $\|A\|_F = (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2)^{1/2}$.

Άσκηση 9.10 Θεωρούμε τον πίνακα A,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Βρείτε τους δείκτες κατάστασης $k_1(A)$, $k_\infty(A)$ και $k_2(A)$.

Υπενθύμιση: $k(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ και $\|A\|_2 = (\rho(A^TA))^{1/2}$ όπου $\rho(B)$ είναι το μέγιστο των μέτρων των ιδιοτιμών του B, $\rho(B) = \max_i |\lambda_i(B)|$, για $\lambda_i(B)$ την $i-$ιδιοτιμή του B. $\rho(B)$ ονομάζεται *φασματική ακτίνα* του πίνακα B.

Άσκηση 9.11 Θεωρήστε το διαγώνιο $n \times n$ πίνακα $D = (\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{10})$. Βρείτε την ορίζουσα του και υπολογίστε επίσης τα $k_1(A)$, $k_\infty(A)$ και $k_2(A)$. Ποια είναι η συμπεριφορά των ποσοτήτων αυτών για $n \to \infty$;

Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για την χρήση αυτών ως κριτήρια καταλληλότητας για την επίλυση γραμμικών συστημάτων με πίνακες αυτής της μορφής;