ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Θεόδωρος Κατσαούνης
Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 8

31/3/2020

Άσκηση 8.1 Στο χώρο των πολυωνύμων βαθμού ίσου ή μικρότερου από 2, $\mathbb{R}_2[x]$, ορίζεται ο τελεστής $L(p(x)) = xp(1)$.

α'. Βρείτε τον πίνακα του τελεστή L ως προς τη διατεταγμένη βάση $\{1, x, x^2\}$.

β'. Βρείτε τις ιδιοτιμές του τελεστή L.

γ'. Εξετάστε εάν ο τελεστής L είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Άσκηση 8.2 Θεωρήστε διανυσματικό χώρο V, με βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$, και γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$,

$$L(v_1) = 4v_3\,, \quad L(v_2) = v_2\,, \quad L(v_3) = 2v_1\,.$$

α'. Δείξτε οτι ο τελεστής L^2 είναι διαγωνιοποιήσιμος.

β'. Εξετάστε εάν ο τελεστής L είναι διαγωνιοποιήσιμος.

γ'. Δείξτε οτι $\sqrt{2}v_1 + 2v_3$ είναι ιδιοδιάνυσμα του L.

Άσκηση 8.3 Δείξτε οτι για κάθε γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$ και θετικό ακέραιο m,

α'. εάν x είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ του L, τότε x είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ^m του L^m.

β'. $\ker L \subseteq \ker L^m$ και $\operatorname{im} L^m \subseteq \operatorname{im} L$.

Άσκηση 8.4 Θεωρήστε έναν διαγωνιοποιήσιμο τελεστή $L : V \longrightarrow V$ και θετικό ακέραιο m.

α'. Δείξτε οτι $\ker L = \ker L^m$ και $\operatorname{im} L = \operatorname{im} L^m$. Δείξτε με ένα αντιπαράδειγμα οτι αυτά δεν ισχύουν για μη διαγωνιοποιήσιμο τελεστή.

β'. Δείξτε οτι $V = \ker L \oplus \operatorname{im} L$.

Άσκηση 8.5 Βρείτε όλους τους αναλλοίωτους υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$, για τον τελεστή T_A, όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 8.6 Εξετάστε εάν είναι τριγωνοποιήσιμος πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 15 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Εάν είναι τριγωνοποιήσιμος, βρείτε πίνακα R τέτοιο ώστε $R^{-1}AR$ είναι άνω τριγωνικός.
(Δείτε το Παράδειγμα 3.24 στις Σημειώσεις των Διαλέξεων 15, 16.)

Άσκηση 8.7 Θεωρούμε διαγωνιοποιήσιμους τετραγωνικούς πίνακες A, B . Δείξτε οτι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι εάν και μονο εάν $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.
Δείξτε οτι εάν οι πίνακες δεν είναι διαγωνιοποιήσιμοι μπορεί να έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, αλλά να μην είναι όμοιοι.(Βρείτε ένα 2×2 αντιπαράδειγμα.)

Άσκηση 8.8 Θεωρούμε δύο γραμμικούς τελεστές L και M στο διανυσματικό χώρο V πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς, οι οποίοι αντιμετατίθενται: $L \circ M = M \circ L$. Δείξτε οτι τότε κάθε ιδιόχωρος του M είναι αναλλοίωτος από τον L. Συμπεράνετε οτι οι M και L έχουν ένα κοινό ιδιοδιάνυσμα.

Άσκηση 8.9 Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των ακόλουθων τελεστών στο χώρο πολυωνύμων $\mathbb{R}_3[x]$:

$$T_1(p(x)) = p(x+1)\,, \quad T_2(p(x)) = (1-x^2)p''(x) - 2xp'(x)\,,$$

όπου $p'(x)$ και $p''(x)$ είναι η πρώτη και η δεύτερη τυπική παράγωγος του πολυωνύμου $p(x)$.