

MEM 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 7

24/3/2020

Άσκηση 7.1 Δίδεται ο διανυσματικός χώρος $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = 0\}$.

α'. Βρείτε τη διάσταση και μία βάση του διανυσματικού χώρου $V \oplus V$.

β'. Βρείτε τη διάσταση και μία βάση του διανυσματικού υπόχωρου $V + V$ του \mathbb{R}^3 .

Άσκηση 7.2 Εάν X, Y, Z είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα \mathbb{K} , δείξτε ότι υπάρχουν ισομορφισμοί.

α'. $X \oplus Y \cong Y \oplus X$

β'. $X \oplus (Y \oplus Z) \cong (X \oplus Y) \oplus Z$

Άσκηση 7.3 Ελέγξτε ότι οι κανονικές εμφυτεύσεις $j_1 : V \rightarrow V \oplus W$ και $j_2 : W \rightarrow V \oplus W$ και οι κανονικές προβολές $p_1 : V \oplus W \rightarrow V$ και $p_2 : V \oplus W \rightarrow W$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, και ότι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$p_1 \circ j_1 = \mathbf{I}_V, \quad p_1 \circ j_2 = 0, \quad p_2 \circ j_1 = 0, \quad p_2 \circ j_2 = \mathbf{I}_W.$$

Άσκηση 7.4 Στο διανυσματικό χώρο \mathbb{C}^4 θεωρήστε τους υπόχωρους

$$U = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : z_1 = z_2\},$$

$$V = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : \\ z_1 + z_2 - z_4 = 0, -z_1 + z_2 + z_3 = 0, z_1 + z_2 + z_3 = z_4\}.$$

α'. Δείξτε ότι $V \subseteq U$.

β'. Βρείτε μία βάση του χώρου πηλίκο U/V .

Άσκηση 7.5 Θεωρήστε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}[x]$ όλων των πολυωνύμων μίας μεταβλητής, και τον υπόχωρο $\mathbb{R}[x]_n$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με n . Έχει ο χώρος πηλίκο $\mathbb{R}[x]/\mathbb{R}[x]_n$ πεπερασμένη διάσταση;