ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Θεόδωρος Κατσαούνης
Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 6

17/3/2020

Άσκηση 6.1 Υποθέτουμε οτι ο 3×3 πίνακας A έχει ιδιοτιμές 0, 3, 5 με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα u, v, w.

α΄. Βρείτε μία βάση του μηδενοχώρου του A, και μία βάση του χώρου στηλών του A.

β΄. Βρείτε μία λύση της εξίσωσης $Ax = v + w$. Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης.

γ΄. Δείξτε οτι η εξίσωση $Ax = u$ δεν έχει λύσεις.

Άσκηση 6.2 Διαγωνιοποιήστε τους ακόλουθους πίνακες (δηλαδή βρείτε R τέτοιους ώστε $R^{-1}AR$ είναι διαγώνιος πίνακας):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6.3 Βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

και γράψτε έναν πίνακα R και έναν διαγώνιο πίνακα D τέτοιους ώστε $AR = RD$.

Άσκηση 6.4 Βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και γράψτε δύο διαφορετικούς πίνακες R που διαγωνιοποιούν τον A.

Άσκηση 6.5 Ποιοί από τους ακόλουθους πίνακες δεν μπορούν να διαγωνιοποιηθούν;

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6.6 Εάν $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, διαγωνιοποιήστε τον A και υπολογίστε τον πίνακα A^{100}.

Άσκηση 6.7 Κατασκευάστε πίνακες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού για το σύνολο $\mathbb{Z}_5 = \{0_5, 1_5, 2_5, 3_5, 4_5\}$ των κλάσεων υπολοίπων modulo 5. Βρείτε το αντίθετο κάθε στοιχείου και το αντίστροφο κάθε μη μηδενικού στοιχείου.

Άσκηση 6.8 Στο σύνολο $\mathbb{Z}_6 = \{0_6, 1_6, 2_6, 3_6, 4_6, 5_6\}$ των κλάσεων υπολοίπων modulo 6, μπορούμε να ορίσουμε πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, με τον ίδιο τρόπο. Δείξτε οτι το στοιχείο 3_6 δεν έχει αντίστροφο.
Δείξτε οτι εάν n δεν είναι πρώτος αριθμός, στο σύνολο $\mathbb{Z}_n$ των κλάσεων υπολοίπων modulo n, υπάρχουν στοιχεία που δεν έχουν αντίστροφο.
Στα Θεμέλια των Μαθηματικών, θα δείξουμε οτι εάν p είναι πρώτος αριθμός, κάθε στοιχείο του $\mathbb{Z}_p$ έχει αντίστροφο.

Άσκηση 6.9 Έστω $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Ορίζουμε πρόσθεση δύο στοιχείων του V και πολλαπλασιασμό στοιχείου του V με αριθμό με τον ακόλουθο τρόπο:

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1) \text{ και } c(x, y) = (cx, y)\,.$$

Εξετάστε εάν ο V με αυτές τις πράξεις είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Ελέγξτε τις επιμεριστικές ιδιότητες.

Άσκηση 6.10 Θεωρούμε το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών ακεραίων modulo 3, $(\mathbb{Z}_3)^2$, ως διανυσματικό χώρο πάνω από το σώμα $\mathbb{Z}_3$. Αυτό το σύνολο έχει εννέα στοιχεία, της μορφής $(m_3,\, n_3)$. Βρείτε τα στοιχεία των υποσυνόλων

α΄) $V = \{(m_3,\, n_3) \,:\, 2_3 m_3 + n_3 = 0\}$,   β΄) $W = \{(m_3,\, n_3) \,:\, m_3 + n_3 = 1_3\}$.

Εξετάστε εάν τα V, W είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $(\mathbb{Z}_3)^2$.