

MEM 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 5

10/3/2020

Άσκηση 5.1 Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Εάν $B = A - 7I$, βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του B . Πως σχετίζονται με αυτά του A ;

Άσκηση 5.2 Δώστε ένα παράδειγμα για να δείξετε ότι οι ιδιοτιμές αλλάζουν όταν αφαιρέσουμε πολλαπλάσιο μίας γραμμής από μία άλλη. Εξηγήστε γιατί εάν το 0 είναι μία από τις ιδιοτιμές, αυτή δεν αλλάζει.

Άσκηση 5.3 Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τη διάσταση του ιδιόχωρου κάθε ιδιοτιμής, και συγκρίνετε με την αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής.

Ελέγξτε ότι το άθροισμα των ιδιοτιμών είναι ίσο με το ίχνος και το γινόμενο είναι ίσο με την ορίζουσα.

Άσκηση 5.4 Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές του ανάστροφου πίνακα A^T είναι ίσες με τις ιδιοτιμές του A .

Άσκηση 5.5 Είναι το σύνολο v_1, v_2, v_3 γραμμικά ανεξάρτητο ως υποσύνολο του \mathbb{C}^4 ;

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 2 \\ -i \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2+4i \\ 4+4i \\ 2-4i \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 5.6 Βρείτε βάσεις για το μηδενόχωρο και το χώρο στηλών του μιγαδικού πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 2 & -i \\ 1+i & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2+4i & 4+4i & 2-4i \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 5.7 Ο πίνακας $Q = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$ παριστάνει περιστροφή στο επίπεδο κατά γωνία ϑ . Είναι γεωμετρικά προφανές ότι όταν η γωνία ϑ δεν είναι πολλαπλάσιο του π , δεν υπάρχει κανένα ιδιοδιάνυσμα του Q στο επίπεδο.

Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και βρείτε τα ιδιοδιανύσματα του Q στο \mathbb{C}^2 .

Άσκηση 5.8 Βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & -6 \\ -16 & 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Για κάθε ιδιοτιμή βρείτε ένα ιδιοδιάνυσμα. Θεωρήστε τον πίνακα R με στήλες τα ιδιοδιανύσματα που βρήκατε. Υπολογίστε τον πίνακα AR . Τι παρατηρείτε; Βρείτε ένα διαγώνιο πίνακα D τέτοιον ώστε $AR = RD$.

Άσκηση 5.9 Δείξτε ότι εάν A είναι 2×2 πίνακας, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Άσκηση 5.10 Δείξτε ότι εάν A είναι πραγματικός πίνακας, και $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα x , τότε $\bar{\lambda}$ είναι επίσης ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα \bar{x} .