ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Θεόδωρος Κατσαούνης
Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 4

3/3/2020

Άσκηση 4.1 Θεωρούμε οτι οι στήλες του $n\times n$ πίνακα A είναι οι $n\times 1$ πίνακες C_1, C_2, …, C_n, και οι γραμμές του $n\times n$ πίνακα B είναι οι $1\times n$ πίνακες R_1, R_2, …, R_n. Για κάθε $i = 1, \dots, n$, το γινόμενο C_iR_i είναι ένας $n\times n$ πίνακας. Εκφράστε το γινόμενο AB ως άθροισμα τέτοιων πινάκων.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Εάν $C_k = (a_{1k}, \dots, a_{nk})$ και $R_k = (b_{k1}, \dots, b_{kn})$, η συνιστώσα του C_kR_k στη θέση (i, j) είναι $a_{ik}b_{kj}$. Η συνιστώσα του AB στη θέση (i, j) είναι $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Άρα $AB = C_1R_1 + \cdots + C_nR_n$.

Άσκηση 4.2 Δείξτε οτι εάν A είναι $m\times k$ πίνακας με ορθογώνιες στήλες $w_1, \dots, w_k$, τότε η προβολή P στο διανυσματικό υπόχωρο $\langle w_1, \dots, w_k\rangle$ είναι το άθροισμα των προβολών P_i στους μονοδιάστατους υπόχωρους $\langle w_i\rangle$, για $i = 1, \dots, k$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Γνωρίζουμε οτι $P = A(A^TA)^{-1}A^T$. Αφού οι στήλες του A είναι ορθογώνιες, A^TA είναι ο διαγώνιος $k\times k$πίνακας με συνιστώσες $w_i^Tw_i$ στη διαγώνιο. Ο πίνακας $A(A^TA)^{-1}$ έχει τις ίδιες στήλες με το A, πολλαπλασιασμένες με $\frac{1}{w_j^Tw_j}$ (Γιατί;). Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της 4.1, το γινόμενο του $A(A^TA)^{-1}$ με τον A^T είναι

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{w_1^Tw_1}w_1w_1^T + \cdots + \frac{1}{w_k^Tw_k}w_kw_k^T\,.$$

Αλλά αυτό είναι το άθροισμα των προβολών στους υπόχωρους $\langle w_1\rangle, \dots, \langle w_k\rangle$ (Δείξτε το).

Άσκηση 4.3 Προβάλετε το διάνυσμα $b = (1, 2)$ σε δύο μή ορθογώνια διανύσματα, $a_1 = (1, 0)$ και $a_2 = (1, 1)$. Επαληθεύστε οτι το άθροισμα των δύο προβολών δεν είναι ίσο προς το b.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\mathrm{pr}_{a_1}b = (1, 0)$, $\mathrm{pr}_{a_2}b = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

Άσκηση 4.4 Εάν u είναι μοναδιαίο διάνυσμα, δείξτε οτι $Q = I - 2uu^T$ είναι συμμετρικός ορθογώνιος πίνακας. (Είναι μία ανάκλαση, και ονομάζεται μετασχηματισμός Householder). Υπολογίστε τον Q όταν $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του συμμετρικού πίνακα, $Q^T = Q$, και του ορθογώνιου πίνακα, $QQ^T = \mathbf{I}$.

Άσκηση 4.5 Από τα μη ορθογώνια διανύσματα v_1, v_2, v_3, βρείτε ορθογώνια διανύσματα q_1, q_2, q_3.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
$q_1 = v_1$, $q_2 = v_2 - \frac{1}{2}q_1$, $q_3 = v_3 - \frac{1}{2}q_1 - \frac{1}{3}q_2$.

Άσκηση 4.6 Ποιά είναι τα δυνατά διανύσματα v_1 και v_2, που δίνουν μετά από ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt τα διανύσματα q_1 και q_2.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$v_1 = aq_1$ για $a > 0$.
$v_2 = bq_1 + cq_2$ για $c > 0$.

Άσκηση 4.7 Δείξτε οτι εάν Q είναι ορθογώνιος πίνακας, τότε $\det Q = \pm 1$.

Άσκηση 4.8 Βρείτε τρία ορθοκανονικά διανύσματα q_1, q_2, $q_3 \in \mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε τα q_1, q_2 να παράγουν το χώρο στηλών του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ποιός θεμελιώδης υπόχωρος του A περιέχει το διάνυσμα q_3; Βρείτε τη βέλτιστη λύση ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης $Ax = b$, όταν $b = (1, 2, 7)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Βρείτε τα q_1, q_2 εφαρμόζοντας τη διαδικασία Gram-Schmidt στις στήλες του πίνακα A. Το q_3 είναι ορθογώνιο στις στήλες του A, άρα ανήκει στο .... του A.

Άσκηση 4.9 Θεωρήστε το διανυσματικό χώρο

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0 \right\}.$$

Βρείτε μία ορθοκανονική βάση του W. Επεκτείνετε τη βάση που βρήκατε σε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
W είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα .... Βρείτε μία βάση και μετατρέψτε την σε ορθοκανονική. Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του μηδενόχωρου είναι ο ....

Άσκηση 4.10 Ποιό πολλαπλάσιο του $a_1 = (1, 1)$ πρέπει να αφαιρεθεί από το $a_2 = (4, 0)$, ώστε το αποτέλεσμα να είναι ορθογώνιο προς το a_1. Παραγοντοποιήστε τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ σε γινόμενο QR όπου Q είναι ορθογώνιος.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Το διπλάσιο. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Άσκηση 4.11 Εφαρμόστε τη διαδικασία Gram-Schmidt στα διανύσματα

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

και εκφράστε το αποτέλεσμα στη μορφή $A = QR$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Για το Τμήμα Α.

Άσκηση 4.12 Βρείτε τις νόρμες $\|A\|_1$ και $\|A\|_\infty$ του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Υπενθύμιση : $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$, $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Άσκηση 4.13 Βρείτε τους δείκτες κατάστασης $k_1(A) = \|A\|_1\|A^{-1}\|_1$ και $k_\infty(A) = \|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty$ για

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Για το Τμήμα Β.

Άσκηση 4.14 Εξετάστε εάν κάποια από τα διανύσματα w, y, z είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, δηλαδή ικανοποιούν μία εξίσωση $Ax = \lambda x$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$