ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Θεόδωρος Κατσαούνης
Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 4

3/3/2020

Άσκηση 4.1 Θεωρούμε οτι οι στήλες του $n \times n$ πίνακα A είναι οι $n \times 1$ πίνακες $C_1, C_2, \ldots, C_n$, και οι γραμμές του $n \times n$ πίνακα B είναι οι $1 \times n$ πίνακες $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$, το γινόμενο $C_i R_i$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας. Εκφράστε το γινόμενο AB ως άθροισμα τέτοιων πινάκων.

Άσκηση 4.2 Δείξτε οτι εάν A είναι $m \times k$ πίνακας με ορθογώνιες στήλες $w_1, \ldots, w_k$, τότε η προβολή P στο διανυσματικό υπόχωρο $\langle w_1, \ldots, w_k \rangle$ είναι το άθροισμα των προβολών P_i στους μονοδιάστατους υπόχωρους $\langle w_i \rangle$, για $i = 1, \ldots, k$.

Άσκηση 4.3 Προβάλετε το διάνυσμα $b = (1, 2)$ σε δύο μή ορθογώνια διανύσματα, $a_1 = (1, 0)$ και $a_2 = (1, 1)$. Επαληθεύστε οτι το άθροισμα των δύο προβολών δεν είναι ίσο προς το b.

Άσκηση 4.4 Εάν u είναι μοναδιαίο διάνυσμα, δείξτε οτι $Q = I - 2uu^T$ είναι συμμετρικός ορθογώνιος πίνακας. (Είναι μία ανάκλαση, και ονομάζεται μετασχηματισμός Householder). Υπολογίστε τον Q όταν $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Άσκηση 4.5 Από τα μη ορθογώνια διανύσματα v_1, v_2, v_3, βρείτε ορθογώνια διανύσματα q_1, q_2, q_3.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 4.6 Ποιά είναι τα δυνατά διανύσματα v_1 και v_2, που δίνουν μετά από ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt τα διανύσματα q_1 και q_2.

Άσκηση 4.7 Δείξτε οτι εάν Q είναι ορθογώνιος πίνακας, τότε $\det Q = \pm 1$.

Άσκηση 4.8 Βρείτε τρία ορθοκανονικά διανύσματα $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε τα q_1, q_2 να παράγουν το χώρο στηλών του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ποιός θεμελιώδης υπόχωρος του A περιέχει το διάνυσμα q_3; Βρείτε τη βέλτιστη λύση ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης $Ax = b$, όταν $b = (1, 2, 7)$.

Άσκηση 4.9 Θεωρήστε το διανυσματικό χώρο

$$W = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}\ .$$

Βρείτε μία ορθοκανονική βάση του W. Επεκτείνετε τη βάση που βρήκατε σε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 4.10 Ποιό πολλαπλάσιο του $a_1 = (1,\, 1)$ πρέπει να αφαιρεθεί από το $a_2 = (4,\, 0)$, ώστε το αποτέλεσμα να είναι ορθογώνιο προς το a_1. Παραγοντοποιήστε τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ σε γινόμενο QR όπου Q είναι ορθογώνιος.

Άσκηση 4.11 Εφαρμόστε τη διαδικασία Gram-Schmidt στα διανύσματα

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

και εκφράστε το αποτέλεσμα στη μορφή $A = QR$.

Για το Τμήμα Α.

Άσκηση 4.12 Βρείτε τις νόρμες $\|A\|_1$ και $\|A\|_\infty$ του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Υπενθύμιση : $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$, $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Άσκηση 4.13 Βρείτε τους δείκτες κατάστασης $k_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1$ και $k_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$ για

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Για το Τμήμα Β.

Άσκηση 4.14 Εξετάστε εάν κάποια από τα διανύσματα w, y, z είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, δηλαδή ικανοποιούν μία εξίσωση $Ax = \lambda x$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$