

MEM 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 2

18/2/2020

Άσκηση 2.1 Βρείτε την παραγοντοποίηση LU , τους οδηγούς και την ορίζουσα του 4×4 πίνακα με στοιχεία $a_{ij} = \min\{i, j\}$.

Άσκηση 2.2 Χρησιμοποιήστε τον τύπο της ορίζουσας για να υπολογίσετε τις ορίζουσες των πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

όπου C είναι ο 6×6 πίνακας με μπλοκ τους πίνακες A και B . Είναι οι στήλες αυτών των πινάκων γραμμικά ανεξάρτητες;

Άσκηση 2.3 Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα A αναπτύσσοντας ως προς την τέταρτη στήλη:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -5 \\ 8 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.4 Εάν F_n είναι η ορίζουσα του $n \times n$ τριδιαγώνιου πίνακα με στοιχεία 1, 1, -1,

$$F_n = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 & -1 \\ & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

δείξτε ότι $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Η ακολουθία F_n είναι η ακολουθία Fibonacci, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Άσκηση 2.5 Εξηγήστε γιατί εάν $\det A \neq 0$, τότε υπάρχει κάποια μετάθεση P των γραμμών του A τέτοια ώστε να μην υπάρχουν 0 στη διαγώνιο του PA .

Υπόδειξη: Υπάρχει τουλάχιστον ένας από τους $n!$ όρους του τύπου της ορίζουσας που δεν είναι 0;

Άσκηση 2.6 Βρείτε τους συμπαράγοντες και τον προσαρτημένο πίνακα. Κατόπιν υπολογίστε τον αντίστροφο πίνακα.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.7 Στην Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα είδαμε ότι για να φέρουμε έναν $n \times n$ πίνακα σε άνω τριγωνική μορφή με απαλοιφή Gauss, απαιτούνται $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$ πολλαπλασιασμοί ή διαιρέσεις. Πόσοι επιπλέον πολλαπλασιασμοί απαιτούνται για να υπολογίσουμε την ορίζουσα;

Στον τύπο της ορίζουσας έχουμε $n!$ όρους. Πόσοι πολλαπλασιασμοί απαιτούνται για να τους υπολογίσουμε;

Συγκρίνετε το κόστος του υπολογισμού της ορίζουσας με απαλοιφή ή με τον τύπο, για $n = 3, 4, 5$ και 10 .

Άσκηση 2.8

α'. Σχεδιάστε το τρίγωνο με κορυφές $A = (2, 2)$, $B = (-1, 3)$ και $C = (0, 0)$. Θεωρήστε το ως το μισό ενός παραλληλογράμμου, και εξηγήστε γιατί το εμβαδόν του είναι

$$\text{εμβαδόν}(ABC) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

β'. Τώρα θεωρήστε το τρίγωνο με κορυφές A, B και $D = (1, -4)$, και εξηγήστε γιατί το εμβαδόν του είναι

$$\text{εμβαδόν}(ABD) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

(Αφαιρέστε μία γραμμή από τις άλλες δύο).

Άσκηση 2.9 Χρησιμοποιήστε τον κανόνα Cramer για να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{rcl} ax + by = 1 & & x + 4y - z = 1 \\ cx + dy = 0 & \text{και} & x + y + z = 0 \\ & & 2x + 3z = 0 \end{array}$$

Άσκηση 2.10 Εξηγήστε γιατί εάν όλοι οι συμπαράγοντες είναι 0, ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος. Εάν όλοι οι συμπαράγοντες είναι διαφορετικοί από το 0, είναι ο πίνακας αντιστρέψιμος;