

MEM 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 1

11/2/2020

Άσκηση 1.1 Εάν ένας 3×3 πίνακας B έχει ορίζουσα $\det B = -1$, βρείτε τις ορίζουσες $\det(\frac{1}{2}B)$, $\det(-B)$, $\det(B^2)$ και $\det(B^{-1})$.

Άσκηση 1.2 Πως συνδέονται οι $\det(2A)$, $\det(-A)$ και $\det(A^2)$ με την $\det A$, όταν A είναι πίνακας n επί n ;

Άσκηση 1.3 Χρησιμοποιήστε απαλοιφή, ή γενικότερα πράξεις μεταξύ των γραμμών, για να φέρετε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

σε άνω τριγωνική μορφή και να υπολογίσετε την ορίζουσα τους.

Εναλλάξτε τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή του πίνακα B , και επαναλάβετε τη διαδικασία.

Άσκηση 1.4 Όταν αντικαταστήσετε τη δεύτερη γραμμή r_2 ενός πίνακα με την $r_2 - 3r_1$ (δηλαδή τη δεύτερη γραμμή μείον 3 φορές την πρώτη γραμμή), πώς αλλάζει η ορίζουσα;

Όταν αντικαταστήσετε τη δεύτερη γραμμή r_2 ενός πίνακα με την $3r_1 - r_2$, πώς αλλάζει η ορίζουσα;

Όταν αντικαταστήσετε τη δεύτερη γραμμή r_2 ενός πίνακα με την $3r_2 - r_1$, πώς αλλάζει η ορίζουσα;

Άσκηση 1.5 Χρησιμοποιήστε πράξεις μεταξύ των γραμμών για να υπολογίσετε τις ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 102 & 202 & 302 \\ 103 & 203 & 303 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t^2 \\ t^2 & t & 1 \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 1.6 Καταμετρήστε τις εναλλαγές γραμμών για να βρείτε τις ορίζουσες

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1.7 Για κάθε n , πόσες εναλλαγές γραμμών απαιτούνται για να φέρουν τις γραμμές του πίνακα A στην αντίθετη διάταξη PA ;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad PA = \begin{bmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}.$$

Βρείτε την ορίζουσα του πίνακα P .

Άσκηση 1.8 Προσδιορίστε εάν οι ακόλουθες μεταθέσεις είναι άρτιες ή περιττές

$$\begin{pmatrix} 1234 \\ 4213 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1234 \\ 3142 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1234 \\ 4321 \end{pmatrix}.$$

Γράψτε τους 4×4 πίνακες που τις παριστάνουν, και υπολογίστε τις ορίζουσες.

Άσκηση 1.9 Για τους ακόλουθους πίνακες βρείτε τον μοναδικό μη μηδενικό όρο στον τύπο για την ορίζουσα.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπάρχει μόνον ένας τρόπος να επιλέξετε 4 μη μηδενικά στοιχεία από διαφορετικές γραμμές και στήλες. Υπολογίστε τις ορίζουσες $\det A$ και $\det B$.

Άσκηση 1.10 Βρείτε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 2 & -2 \\ -3 & -1 - \lambda & 3 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Γιά ποιές τιμές του λ είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος;

Για κάθε τιμή του λ για την οποία ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος, βρείτε μία βάση του μηδενόχωρου του πίνακα.