ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Απαντήσεις ή Υποδείξεις στο Εργαστήριο Προβλημάτων 13

Άσκηση 13.1 Βρείτε τον πίνακα της απεικόνισης $L(x, y, z) = (x + y, 3y, x + 2y - 4z)$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Επαληθεύστε τον πίνακα που βρήκατε υπολογίζοντας το διάνυσμα $L(-1, 5, 2)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$${}_{\mathcal{E}}L_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 13.2 Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$,

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2 - x_3, 3x_1 - 5x_2, 4x_2 - 2x_3)$$

Προσδιορίστε τον πίνακα A της L ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$. Βρείτε την τάξη του A, και μια βάση της εικόνας της L.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$. Η τάξη του A είναι 3. Μία βάση του $\operatorname{im} L$ είναι

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Άσκηση 13.3 Βρείτε τον πίνακα του τελεστή παραγώγισης D, που απεικονίζει το πολυώνυμο $p(x)$ στην παράγωγό του $Dp(x)$, ως προς τη βάση $\{2x^2, x, -1\}$ του $\mathbb{R}[x]_2$. Επαληθεύστε τον πίνακα που βρήκατε υπολογίζοντας το πολυώνυμο $D(3x^2 - 2x + 4)$ πρώτα χρησιμοποιώντας τον πίνακα που βρήκατε και κατόπιν υπολογίζοντας την παράγωγο.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$D(2x^2) = 4x = 0(2x^2) + 4(x) + 0(-1)$. Άρα η πρώτη στήλη του πίνακα είναι $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Παρόμοια βρίσκουμε οτι η δεύτερη στήλη είναι $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ και η τρίτη $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Το διάνυσμα συντεταγμένων του $3x^2-2x+4$ είναι $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$. Άρα το διάνυσμα συντεταγμένων του $D(3x^2-2x+4)$ είναι $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$. Πράγματι, $D(3x^2-2x+4) = 6x-2 = 0(2x^2)+6(x)+2(-1)$.

Άσκηση 13.4 $\mathbb{R}[x]_k$ είναι ο χώρος των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με k, και $L : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_1$ είναι η γραμμική απεικόνιση

$$L(ax^2+bx+c) = ax+c$$

α΄. Βρείτε τον πίνακα της L ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{B}_2 = \{1, x, x^2\}$ του $\mathbb{R}[x]_2$ και $\mathcal{B}_1 = \{1, x\}$ του $\mathbb{R}[x]_1$.

β΄. Βρείτε τους πίνακες μετάβασης για τις βάσεις $\mathcal{B}_2' = \{1, x, x^2+x\}$ του $\mathbb{R}[x]_2$ και $\mathcal{B}_1' = \{1, x-1\}$ του $\mathbb{R}[x]_1$, και χρησιμοποιήστε τους για να υπολογίσετε τον πίνακα της L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_2'$ και $\mathcal{B}_1'$.

Άσκηση 13.5 Αποδείξτε οτι το σύνολο $\{1+x, x+x^2, \ldots, x^{n-1}+x^n, x^n\}$ είναι μία βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}[x]_n$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με n.

Εάν $L : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_3$ είναι η απεικόνιση $L(p) = xp'(x) + x^2p'(x)$ (όπου $p'(x)$ είναι η παράγωγος του πολυώνυμου $p(x)$) βρείτε τον πίνακα της L ως προς τις βάσεις

α΄. $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$, $\mathcal{C}_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$,

β΄. $\mathcal{B}_2 = \{1+x, x+x^2, x^2\}$, $\mathcal{C}_2 = \{1+x, x+x^2, x^2+x^3, x^3\}$.

Άσκηση 13.6 Θεωρήστε το διανυσματικό χώρο όλων των 2×2 πινάκων, και τη γραμμική απεικόνιση $L : \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ που ορίζεται $L(X) = PX$, όπου $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Βρείτε τον 4×4 πίνακα της L ως προς την ακόλουθη βάση του $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\begin{aligned} L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 1\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Άρα το διάνυσμα συντεταγμένων του $L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ είναι $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Παρόμοια βρίσκουμε τα διανύσματα συντεταγμένων των $L\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$, $L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$ και $L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$. Ο πίνακας της απεικόνισης L ως προς τη δοθείσα βάση είναι $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 13.7 Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$

$$L : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a-d & -b-c \\ b+c & d-a \end{bmatrix}.$$

α′. Δείξτε οτι η L είναι γραμμική απεικόνιση, και βρείτε τον πίνακα της L ως προς την βάση

$$\mathcal{E}_{2,2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

β′. Βρείτε βάσεις των $\ker L$, $\operatorname{im} L$ και $\ker L \cap \operatorname{im} L$.