**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**
**Τμήμα Μαθηματικών και**
**Εφαρμοσμένων Μαθηματικών**

**Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20**
**Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης**
**Θανάσης Φειδάς**

# ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

## Απαντήσεις ή Υποδείξεις στο Εργαστήριο Προβλημάτων 12

**Άσκηση 12.1** Ποιος πίνακας παριστάνει την απεικόνιση που στέλνει το $(1, 0)$ στο $(2, 5)$ και το $(0, 1)$ στο $(1, 3)$; Ποιος πίνακας στέλνει το $(2, 5)$ στο $(1, 0)$ και το $(1, 3)$ στο $(0, 1)$; Γιατί δεν υπάρχει πίνακας που να απεικονίζει το $(2, 6)$ στο $(1, 0)$ και το $(1, 3)$ στο $(0, 1)$;

**Άσκηση 12.2** Γιατί δεν υπάρχει πίνακας $A$ τέτοιος ώστε το διάνυσμα $(1, 1, 1)$ να περιέχεται στο χώρο γραμμών και στο μηδενοχώρο του $A$;

**Απάντηση - Υπόδειξη.**
Εάν $v$ είναι διάνυσμα στο μηδενόχωρο του πίνακα $A$ και $u$ είναι διάνυσμα στο χώρο γραμμών του $A$, τότε $u^T v = 0$.

**Άσκηση 12.3** Εάν οι στήλες του $A$ είναι $n$ διανύσματα του $\mathbb{R}^m$, ποιά είναι η τάξη του $A$ όταν τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ποιά όταν τα διανύσματα παράγουν τον $\mathbb{R}^m$. Ποιά όταν τα διανύσματα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^m$;

**Άσκηση 12.4** Θεωρούμε το επίπεδο $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$. Δείξτε οτι κάθε ένα από τα σύνολα $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ είναι βάσεις του $W$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Δείξτε οτι το διάνυσμα $v = (5, 7, 3)$ ανήκει στο $W$, και βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων $v_{\mathcal{B}}$ του $v$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$. Βρείτε τον πίνακα μετάβασης από τη βάση $\mathcal{C}$ στη βάση $\mathcal{B}$, δηλαδή τον πίνακα $A$ για τον οποίο

$$v_{\mathcal{B}} = A v_{\mathcal{C}} .$$

Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη σχέση για να υπολογίσετε το διάνυσμα συντεταγμένων $v_{\mathcal{C}}$, και επαληθεύστε το αποτέλεσμα.

**Απάντηση - Υπόδειξη.**
$W$ είναι υπόχωρος διάστασης 2 του $\mathbb{R}^3$.
Ελέγχουμε οτι τα δύο διανύσματα του $\mathcal{B}$ ανήκουν στο $W$ και είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς αποτελούν βάση του $W$.
Το ίδιο για τα δύο διανύσματα του $\mathcal{C}$.

Για να βρούμε το διάνυσμα συντεταγμένων $v_{\mathcal{B}}$ λύνουμε την εξίσωση $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$. Βρίσκουμε $v_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{C}$ στη βάση $\mathcal{B}$ έχει ως στήλες τα διανύσματα συντεταγμένων των στοιχείων της $\mathcal{C}$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$. Δηλαδή είναι ο πίνακας που ικανοποιεί $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Βρίσκουμε οτι $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Βρίσκουμε το $v_{\mathcal{C}}$ λύνοντας την εξίσωση $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ και βρίσκουμε $v_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Ελέγχουμε οτι $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$.

**Άσκηση 12.5** Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ παριστάνει μία ***διαστολή*** στη διεύθυνση του $x-$άξονα. Σχεδιάστε τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, και γύρω του σημεία $(2x, y)$ που προκύπτουν από πολλαπλασιασμό με τον πίνακα $A$. Τι σχήμα έχει η καμπύλη που προκύπτει;

**Άσκηση 12.6** Ποιός πίνακας παριστάνει την απεικόνιση που περιστρέφει κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ κατά μία ορθή, και στη συνέχεια προβάλλει πάνω στον $x-$άξονα; Ποιός πίνακας παριστάνει την απεικόνιση που προβάλλει στον $x-$άξονα και στη συνέχεια προβάλλει πάνω στον $y-$άξονα;

**Απάντηση - Υπόδειξη.**

Περιστροφή κατά $\frac{\pi}{2}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Προβολή στον $x$-άξονα, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ο ζητούμενος πίνακας που παριστάνει τη σύνθεση των δύο απεικονίσεων είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Άσκηση 12.7** Πολυώνυμα Tchebychev ονομάζονται τα πολυώνυμα $T_n$, για $n = 0, 1, 2, \ldots$, τα οποία ικανοποιούν την επαγωγική σχέση

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\,, \quad T_0 = 1\,, \quad T_1 = x\,.$$

α΄. Υπολογίστε τα πολυώνυμα Tchebychev για $n = 2, 3$.

β΄. Δείξτε οτι $\mathcal{B} = \{T_0, T_1, T_2, T_3\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}[x]_3$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με 3.

γ΄. Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ του πολυωνύμου $p(x) = 4x^3 - 2x^2 - x - 1$.