

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Απαντήσεις ή Υποδείξεις στο Εργαστήριο Προβλημάτων 11

Άσκηση 11.1 Βρείτε τη διάσταση, και κατασκευάστε μια βάση των τεσσάρων υποχώρων που σχετίζονται με κάθε ένα από τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. Χώρος στηλών: $\dim \mathcal{R}(U) = \dim \mathcal{R}(A) = 1$.

Βάση του $\mathcal{R}(U)$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Βάση του $\mathcal{R}(A)$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

β'. Μηδενόχωρος: $\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(A)$ και $\dim \mathcal{N}(A) = 3$.

Βάση του $\mathcal{N}(A)$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

γ'. Χώρος γραμμών: $\mathcal{R}(U^T) = \mathcal{R}(A^T)$ και $\dim \mathcal{R}(A^T) = 1$.

Βάση του $\mathcal{R}(A^T)$, $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

δ'. Αριστερός μηδενόχωρος: $\dim \mathcal{N}(U^T) = \dim \mathcal{N}(A^T) = 1$.

Βάση του $\mathcal{N}(U^T)$, $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Βάση του $\mathcal{N}(A^T)$, $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Άσκηση 11.2 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε βάσεις για το χώρο στηλών $\mathcal{R}(A)$, το χώρο γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$, το μηδενόχωρο $\mathcal{N}(A)$ και τον αριστερό μηδενόχωρο $\mathcal{N}(A^T)$.

Άσκηση 11.3 Βρείτε την εικόνα του γενικού σημείου (v_1, \dots, v_n) του πεδίου ορισμού, για τις απεικονίσεις T_A και T_B που ορίζονται με πολλαπλασιασμό από τα αριστερά με τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T_A(v_1, v_2) = (v_1 + 2v_2, 0)$. Η εικόνα $\text{im } T_A$ είναι ο υπόχωρος που παράγεται από το διάνυσμα $(1, 0)$.

$T_B: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ο πίνακας έχει τάξη 3, άρα η εικόνα $\text{im } T_B$ είναι ολόκληρος ο χώρος \mathbb{R}^3

Άσκηση 11.4 Βρείτε τον πίνακα A στον οποίο αντιστοιχεί η γραμμική απεικόνιση

$$f(x, y) = (3x + y, 2y, x - y).$$

Άσκηση 11.5 Δείξτε ότι οι παρακάτω απεικονίσεις δεν είναι γραμμικές.

α'. $g(x, y, z) = (3x, y^2)$.

β'. $h(u, v, w) = (v + 2, 4u)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Ελέγξτε ότι $g(0, 2, 0) \neq g(0, 1, 0) + g(0, 1, 0)$ και ότι $h(0, 2, 0) \neq h(0, 1, 0) + h(0, 1, 0)$.

Άσκηση 11.6 Βρείτε τον πίνακα που αντιστοιχεί στη γραμμική απεικόνιση η οποία:

α'. Απεικονίζει τα διανύσματα $(1, 0)$ και $(0, 1)$ στα διανύσματα $(1, 3)$ και $(7, 1)$, αντίστοιχα.

β'. Απεικονίζει τα διανύσματα $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$ στα διανύσματα $(1, 5, 2, 9)$, $(2, 6, 4, 7)$ και $(\sqrt{3}, 3, 7, 1)$, αντίστοιχα.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. Ο πίνακας A που απεικονίζει τα διανύσματα $(1, 0)$ και $(0, 1)$ στα διανύσματα $(1, 3)$ και $(7, 1)$, ικανοποιεί τη σχέση $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

β'. Ο πίνακας B που απεικονίζει τα διανύσματα $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$ στα διανύσματα $(1, 5, 2, 9)$, $(2, 6, 4, 7)$ και $(\sqrt{3}, 3, 7, 1)$, ικανοποιεί τη σχέση $B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \sqrt{3} \\ 5 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 9 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 11.7 Εάν w_1, w_2, w_3 είναι οποιαδήποτε διανύσματα, δείξτε ότι οι διαφορές $u_1 = w_2 - w_3, u_2 = w_1 - w_3$ και $u_3 = w_1 - w_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένες. Βρείτε ένα γραμμικό συνδυασμό των u_1, u_2, u_3 που δίδει 0.

Άσκηση 11.8 Βρείτε μία βάση για το επίπεδο $x - 2y + 3z = 0$ στο \mathbb{R}^3 . Στη συνέχεια βρείτε μία βάση για την τομή αυτού του επιπέδου με το (x, y) -επίπεδο.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Το επίπεδο $x - 2y + 3z = 0$ είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 11.9 Υποθέτουμε ότι S είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^6 , διάστασης 5. Είναι τα ακόλουθα αληθή ή ψευδή;

- α'. Κάθε βάση του S μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση του \mathbb{R}^6 , προσθέτοντας ένα ακόμη διάνυσμα.
- β'. Κάθε βάση του \mathbb{R}^6 μπορεί να περιοριστεί σε μία βάση του S , διαγράφοντας ένα διάνυσμα.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Το πρώτο είναι αληθές, το δεύτερο είναι ψευδές.

Άσκηση 11.10 Αποδείξτε ότι εάν V και W είναι τρισδιάστατοι υπόχωροι του \mathbb{R}^5 , τότε V και W πρέπει να έχουν ένα κοινό μη μηδενικό διάνυσμα. (Ξεκινήστε με βάσεις για τους δύο υπόχωρους, που συνολικά περιέχουν 6 διανύσματα).

Άσκηση 11.11 Εάν οι απεικονίσεις f και g είναι γραμμικές, και $f(u) = g(u) = u$, τότε $f \circ g(u)$ είναι ίσο με u ή u^2 ;

Άσκηση 11.12 Δείξτε ότι εάν $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε $f^2 = f \circ f$ είναι γραμμική απεικόνιση.