ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Απαντήσεις ή Υποδείξεις στο Εργαστήριο Προβλημάτων 10

Άσκηση 10.1 Δίνονται τα διανύσματα:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

α΄. Δείξτε ότι το w_1 μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των v_1 και v_2, αλλά το w_2 δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των v_1 και v_2.

β΄. Εξηγήστε ποιος είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα v_1, v_2 και w_1. Εξηγήστε ποιος είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα v_1, v_2 και w_2.

γ΄. Δείξτε οτι τα διανύσματα v_1, v_2 w_1 και w_2 παράγουν τον $\mathbb{R}^3$, δηλαδή οτι για κάθε $u = (x, y, z)$ υπάρχουν a, b, c, d τέτοια ώστε $u = av_1 + bv_2 + cw_1 + dw_2$.
Ακόμα δείξτε οτι κάθε διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^3$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των v_1, v_2 w_1 και w_2 με άπειρους τρόπους.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Μπορείτε να λύσετε τις αντίστοιχες εξισώσεις για να απαντήσετε τα ερωτήματα (α΄) και (β΄). Εναλλακτικά, θεωρήστε τον πίνακα A και τον αντίστοιχο κλιμακωτό πίνακα U:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 2 & 2 & y \\ 1 & 3 & 5 & 5 & z \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 2 & 2 & y \\ 0 & 0 & 0 & 2 & z+x-2y \end{bmatrix}.$$

α΄. Από τις 3 πρώτες στήλες του U βλέπουμε οτι το w_1 εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των v_1 και v_2.
Από τις στήλες 1, 2 και 4, βλέπουμε οτι το w_2 δεν εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των v_1 και v_2.

β΄. Από τις στήλες 1, 2, 3 και 5 του U βλέπουμε οτι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα v_1, v_2 και w_1 είναι το σύνολο των διανυσμάτων (x, y, z) για τα οποία $z+x-2y = 0$.
Από τις στήλες 1, 2, 4 και 5 του U βλέπουμε οτι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα v_1, v_2 και w_2 είναι όλο το σύνολο $\mathbb{R}^3$.

γ'. Από τον πίνακα U βλέπουμε οτι για κάθε $u = (x, y, z)$ υπάρχουν a, b, c, d τέτοια ώστε $u = av_1 + bv_2 + cw_1 + dw_2$.
Αφού η μεταβλητή c είναι ελεύθερη, κάθε διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^3$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των v_1, v_2 w_1 και w_2 με άπειρους τρόπους.

Άσκηση 10.2 Θεωρούμε τα διανύσματα $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, 1, 2)$ και $w = (1, 0, 1)$ του $\mathbb{R}^3$. Χρησιμοποιήστε απαλοιφή Gauss σε κατάλληλο πίνακα για να ελέγξετε εάν η συλλογή u, v, w είναι γραμμικά εξαρτημένη.
Το ίδιο για τη συλλογή $(1, 2, 1)$, $(0, 2, 3)$, $(1, 5, -1)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε απαλοιφή είτε στον πίνακα με στήλες τα 3 διασνύσματα, είτε στον πίνακα με γραμμές τα3 διανύσματα.

Άσκηση 10.3 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω συλλογές διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητες:

α'. $1 + x$, $x + x^2$, $1 + x^2$ στο χώρο $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων.

β'. Οι 2×2 πίνακες $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ στο χώρο $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$.

γ'. Οι συναρτήσεις 1, $\cos x$, $\sin x$ στο χώρο των πραγματικών συναρτήσεων.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. $1+x$, $x+x^2$, $1+x^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εάν $a(1+x)+b(x+x^2)+c(1+x^2 = 0$,τότε $a + c = 0$, $a + b = 0$ και $b + c = 0$. Αυτό ισχύει μόνον όταν $a = b = c = 0$.

β'. Είναι γραμμικά εξαρτημένοι, αφού

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \,.$$

γ'. Εάν $a \cdot 1 + b \cdot \cos + c \cdot \sin = 0$, η ισότητα πρέπει να ισχύει για κάθε x. Θεωρήστε τρεις κατάλληλες τιμές του x, για να δείξετε οτι a, b, c είναι όλα 0.

Άσκηση 10.4 Στο διανυσματικό χώρο $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ των 2 επί 2 πινάκων πάνω από το $\mathbb{R}$, βρείτε 5 γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα (δηλαδή πίνακες) που να παράγουν όλο το χώρο. Πόσα από αυτά που βρήκατε είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

Άσκηση 10.5 Στο διανυσματικό χώρο V τα διανύσματα v, u, w είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Δείξτε οτι και τα διανύσματα $v + u$, $u + w$ και $w + v$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Εάν $a(v + u) + b(u + w) + c(w + v) = 0$, τότε $(a + b)u + (a + c)v + (b + c)w = 0$. Εάν u, v, w είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τι μπορείτε να συμπεράνετε για τα a, b, c;

Άσκηση 10.6 Στον $\mathbb{R}^3$ βρείτε 4 διανύσματα ώστε κάθε 2 από αυτά να είναι γραμμικά ανεξάρτητα ενώ κάθε 3 από αυτά γραμμικά εξαρτημένα.

Άσκηση 10.7 Δείξτε οτι τα διανύσματα

$$u_1 = (0, 1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 0, 1, 1), \quad u_3 = (1, 1, 0, 1) \quad \text{και} \quad u_4 = (1, 1, 1, 0)$$

αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^4$.
Εκφράστε το διάνυσμα $v = (1, 1, 1, 1)$ ως γραμμικό συνδυασμό των u_1, u_2, u_3, u_4.
Το ίδιο για το $w = (1, 0, 0, 0)$.

Άσκηση 10.8. Δίδονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = 2x_4, x_2 = x_3\}$ και $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_4 = 0\}$. Βρείτε βάσεις για τους χώρους U, V, $U \cap V$ και $U + V$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
U είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.
V είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
$U \cap V$ είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $U + V$ είναι ο χώρος που παράγεται από την ένωση των διανυσμάτων που παράγουν το U και των διανυσμάτων που παράγουν το V. Πώς βρίσκετε μία βάση αυτού του χώρου;

Άσκηση 10.9 Βρείτε μία βάση και τη διάσταση στους παρακάτω διανυσματικούς χώρους

α΄. V ο χώρος των πινάκων της μορφής $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

β΄. W ο χώρος των πολυωνύμων p τέτοιων ώστε $\deg p \le 3$ και $p(1) = 0$.

γ΄. $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 3x_2, x_3 = 7x_4\}$.

δ΄. S ο χώρος των συμμετρικών $n \times n$ πραγματικών πινάκων (δηλαδή όσων ικανοποιούν $A^T = A$).

Άσκηση 10.10 Θεωρήστε μία συλλογή διανυσμάτων C τέτοια ώστε κάθε 2 διανύσματα της C είναι γραμμικά εξαρτημένα. Δείξτε οτι όλα τα διανύσματα της C είναι πολλαπλάσια ενός διανύσματος.

Άσκηση 10.11 Δίδονται τρία διανύσματα $u_1, u_2, u_3 \in V$. Δείξτε οτι εάν $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle$, τότε τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ισχύει το αντίστροφο;

Απάντηση - Υπόδειξη.
Εάν $w = au_1 + bu_2 \neq 0$, υπάρχουν c, d τέτοια ώστε $w = cu_2 + du_3$. Τότε $au_1 + (b-c)u_2 +$

$du_3 = 0$.
Τι συμβαίνει όταν τα u_1, u_2 είναι συγγραμμικά;

Άσκηση 10.12 Εάν $X_1, \ldots, X_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι πίνακες στο χώρο $\mathcal{M}(k, \mathbb{R})$, και A, B είναι αντιστρέφιμοι $k \times k$ πίνακες, δείξτε οτι οι $AX_1B, \ldots, AX_nB$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι.