ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εργαστήριο Προβλημάτων 13

Άσκηση 13.1 Βρείτε τον πίνακα της απεικόνισης $L(x,\, y,\, z) = (x+y,\, 3y,\, x+2y-4z)$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Επαληθεύστε τον πίνακα που βρήκατε υπολογίζοντας το διάνυσμα $L(-1,\, 5,\, 2)$.

Άσκηση 13.2 Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$,

$$L(x_1,\, x_2,\, x_3) = (x_1,\, x_1+x_2-x_3,\, 3x_1-5x_2,\, 4x_2-2x_3)$$

Προσδιορίστε τον πίνακα A της L ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$. Βρείτε την τάξη του A, και μια βάση της εικόνας της L.

Άσκηση 13.3 Βρείτε τον πίνακα του τελεστή παραγώγισης D, που απεικονίζει το πολυώνυμο $p(x)$ στην παράγωγό του $Dp(x)$, ως προς τη βάση $\{2x^2,\, x,\, -1\}$ του $\mathbb{R}[x]_2$. Επαληθεύστε τον πίνακα που βρήκατε υπολογίζοντας το πολυώνυμο $D(3x^2-2x+4)$ πρώτα χρησιμοποιώντας τον πίνακα που βρήκατε και κατόπιν υπολογίζοντας την παράγωγο.

Άσκηση 13.4 $\mathbb{R}[x]_k$ είναι ο χώρος των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με k, και $L : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_1$ είναι η γραμμική απεικόνιση

$$L(ax^2+bx+c) = ax+c$$

α′. Βρείτε τον πίνακα της L ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{B}_2 = \{1,\, x,\, x^2\}$ του $\mathbb{R}[x]_2$ και $\mathcal{B}_1 = \{1,\, x\}$ του $\mathbb{R}[x]_1$.

β′. Βρείτε τους πίνακες μετάβασης για τις βάσεις $\mathcal{B}_2' = \{1,\, x,\, x^2+x\}$ του $\mathbb{R}[x]_2$ και $\mathcal{B}_1' = \{1,\, x-1\}$ του $\mathbb{R}[x]_1$, και χρησιμοποιήστε τους για να υπολογίσετε τον πίνακα της L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_2'$ και $\mathcal{B}_1'$.

Άσκηση 13.5 Αποδείξτε οτι το σύνολο $\{1+x,\, x+x^2, \ldots, x^{n-1}+x^n,\, x^n\}$ είναι μία βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}[x]_n$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με n.

Εάν $L : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_3$ είναι η απεικόνιση $L(p) = xp'(x) + x^2p'(x)$ (όπου $p'(x)$ είναι η παράγωγος του πολυώνυμου $p(x)$) βρείτε τον πίνακα της L ως προς τις βάσεις

α′. $\mathcal{B}_1 = \{1,\, x,\, x^2\}$, $\mathcal{C}_1 = \{1,\, x,\, x^2,\, x^3\}$,

β′. $\mathcal{B}_2 = \{1+x,\, x+x^2,\, x^2\}$, $\mathcal{C}_2 = \{1+x,\, x+x^2,\, x^2+x^3,\, x^3\}$.

Άσκηση 13.6 Θεωρήστε το διανυσματικό χώρο όλων των 2×2 πινάκων, και τη γραμμική απεικόνιση $L : \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ που ορίζεται $L(X) = PX$, όπου $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Βρείτε τον 4×4 πίνακα της L ως προς την ακόλουθη βάση του $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Άσκηση 13.7 Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$

$$L : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a-d & -b-c \\ b+c & d-a \end{bmatrix}.$$

α΄. Δείξτε οτι η L είναι γραμμική απεικόνιση, και βρείτε τον πίνακα της L ως προς την βάση

$$\mathcal{E}_{2,2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

β΄. Βρείτε βάσεις των $\ker L$, $\operatorname{im} L$ και $\ker L \cap \operatorname{im} L$.