ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Απαντήσεις ή Υποδείξεις στο Εργαστήριο Προβλημάτων 9

Άσκηση 9.1 Δίδονται τα διανύσματα $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 2, 1)$, $x = (-2, -3, -2)$ και $y = (0, 1, -3)$ του $\mathbb{R}^3$, και οι διανυσματικοί υπόχωροι $A = \langle u, v\rangle$ και $B = \langle x, y\rangle$. Προσδιορίστε το διανυσματικό υπόχωρο $A + B$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$A + B$ είναι ο χώρος που παράγεται από τα διανύσματα u, v, x, y. Ο πίνακας που έχει αυτά τα διανύσματα ως στήλες (ή ως γραμμές) έχει τάξη 3. Άρα $A + B$ είναι όλος ο χώρος $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 9.2 Αν $A = \{(u, w, z) \in \mathbb{R}^3 : 3u + 2w = 0\}$ και $B = \{(u, w, z) \in \mathbb{R}^3 : w + z = 0\}$ προσδιορίστε ένα πεπερασμένο παράγον σύνολο για καθένα από τους A, B, $A \cap B$ και $A + B$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ο A είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα $[3\ 2,\ 0]$. Παράγεται από τα διανύσματα $(0, 0, 1)$ και $(-2, 3, 0)$.
Ο B παράγεται από τα διανύσματα $(1, 0, 0)$ και $(0, -1, 1)$.
Ο $A \cap B$ παράγεται από το διάνυσμα $(2, -3, 3)$, το οποίο βρίσκουμε με τη διαδικασία του Παραδείγματος 5.25.
Ο $A + B$ είναι όλος ο χώρος $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 9.3 Έστω $\mathcal{M}(3, \mathbb{R})$ ο διανυσματικός χώρος των 3×3 πινάκων. Εάν W είναι το σύνολο των άνω τριγωνικών πινάκων και U το σύνολο των κάτω τριγωνικών πινάκων, δείξτε οτι W και U είναι υπόχωροι και βρείτε ένα πεπερασμένο παράγον σύνολο για καθένα από τους W, U, $W \cap U$ και $W + U$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ελέγξτε οτι W και U είναι κλειστά ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου.

$$
\begin{aligned}
W = \Bigg\langle & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Bigg\rangle .
\end{aligned}
$$

Ανάλογα για το U, το $W \cap U$ που είναι οι διαγώνιοι πίνακες, και το $W + U$ που είναι όλοι οι 3×3 πίνακες.

Άσκηση 9.4 Αν X, Y, Z είναι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V, δείξτε οτι εάν $X \subseteq Z$ και $Y \subseteq Z$ τότε $X + Y \subseteq Z$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Γνωρίζουμε οτι $X + Y = \langle X \cup Y \rangle$. Αφού $X \subseteq Z$ και $Y \subseteq Z$, ισχύει $X \cup Y \subseteq Z$. Αφού Z είναι διανυσματικός υπόχωρος, $\langle X \cup Y \rangle \subseteq Z$.

Άσκηση 9.5 Θεωρούμε διανύσματα $\{x_1, \ldots, x_n\}$ και $y_1, \ldots, y_n$ σε διανυσματικό χώρο V. Υποθέτουμε οτι $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ και επιπλέον οτι $V = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$. Δείξτε οτι τότε τα $\{x_1, \ldots, x_n\}$ επίσης παράγουν το V.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Αφού $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, ισχύει επίσης $\langle y_1, \ldots, y_n \rangle \subseteq \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Άρα $V \subseteq \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.
Αφού $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V$, ισχύει επίσης $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \subseteq V$.
Συνεπώς $V = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Άσκηση 9.6 Δείξτε οτι το σύνολο των 2 επί 2 αντιστρέψιμων πινάκων παράγει το διανυσματικό χώρο $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$.
Δείξτε επίσης οτι το σύνολο των 2 επί 2 μή αντιστρέψιμων πινάκων παράγει τον $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ελέγξτε οτι οι πίνακες $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμοι. Δείξτε οτι παράγουν το χώρο όλων των 2×2 πινάκων.

Άσκηση 9.7 Βρείτε υπόχωρους V_1 και V_2 του $\mathbb{R}^3$ τέτοιους ώστε $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2$ αλλά $\mathbb{R}^3 \neq V_1 \oplus V_2$.

Άσκηση 9.8 Έστω $\mathbb{R}[x]_3$ ο χώρος των πολυωνύμων πάνω από το $\mathbb{R}$ βαθμού ≤ 3. Αν W ο υπόχωρος του $\mathbb{R}[x]_3$ που παράγεται από τα $1 + 2x$, $-3x + 5x^2$ να βρεθούν δύο διαφορετικοί υπόχωροι Z_1 και Z_2 του $\mathbb{R}[x]_3$ τέτοιοι ώστε $\mathbb{R}[x]_3 = W \oplus Z_1$ και $\mathbb{R}[x]_3 = W \oplus Z_2$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ο Z_1 παράγεται από 2 πολυώνυμα που μαζί με τα $1 + 2x$, $-3x + 5x^2$ αποτελούν ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Το ίδιο και ο Z_2, και επί πλέον ο Z_2 δεν είναι υπόχωρος του Z_1. Για παράδειγμα, θεωρήστε τους υπόχωρους $Z_1 = \langle x^2, x^3 \rangle$ και $Z_2 = \langle x, x^3 \rangle$.