

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εργαστήριο Προβλημάτων 12

Άσκηση 12.1 Ποιος πίνακας παριστάνει την απεικόνιση που στέλνει το $(1, 0)$ στο $(2, 5)$ και το $(0, 1)$ στο $(1, 3)$; Ποιος πίνακας στέλνει το $(2, 5)$ στο $(1, 0)$ και το $(1, 3)$ στο $(0, 1)$; Γιατί δεν υπάρχει πίνακας που να απεικονίζει το $(2, 6)$ στο $(1, 0)$ και το $(1, 3)$ στο $(0, 1)$;

Άσκηση 12.2 Γιατί δεν υπάρχει πίνακας A τέτοιος ώστε το διάνυσμα $(1, 1, 1)$ να περιέχεται στο χώρο γραμμών και στο μηδενικό χώρο του A ;

Άσκηση 12.3 Εάν οι στήλες του A είναι n διανύσματα του \mathbb{R}^m , ποιά είναι η τάξη του A όταν τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ποιά όταν τα διανύσματα παράγουν τον \mathbb{R}^m . Ποιά όταν τα διανύσματα αποτελούν βάση του \mathbb{R}^m

Άσκηση 12.4 Θεωρούμε το επίπεδο $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$. Δείξτε ότι κάθε ένα από τα σύνολα \mathcal{B} και \mathcal{C} είναι βάσεις του W :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Δείξτε ότι το διάνυσμα $v = (5, 7, 3)$ ανήκει στο W , και βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων $v_{\mathcal{B}}$ του v ως προς τη βάση \mathcal{B} . Βρείτε τον πίνακα μετάβασης από τη βάση \mathcal{C} στη βάση \mathcal{B} , δηλαδή τον πίνακα A για τον οποίο

$$v_{\mathcal{B}} = Av_{\mathcal{C}}.$$

Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη σχέση για να υπολογίσετε το διάνυσμα συντεταγμένων $v_{\mathcal{C}}$, και επαληθεύστε το αποτέλεσμα.

Άσκηση 12.5 Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ παριστάνει μία **διαστολή** στη διεύθυνση του x -άξονα. Σχεδιάστε τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, και γύρω του σημεία $(2x, y)$ που προκύπτουν από πολλαπλασιασμό με τον πίνακα A . Τι σχήμα έχει η καμπύλη που προκύπτει;

Άσκηση 12.6 Ποιός πίνακας παριστάνει την απεικόνιση που περιστρέφει κάθε διάνυσμα του \mathbb{R}^2 κατά μία ορθή, και στη συνέχεια προβάλλει πάνω στον x -άξονα; Ποιός πίνακας παριστάνει την απεικόνιση που προβάλλει στον x -άξονα και στη συνέχεια προβάλλει πάνω στον y -άξονα;

Άσκηση 12.7 Πολυώνυμα Tchebychev ονομάζονται τα πολυώνυμα T_n , για $n = 0, 1, 2, \dots$, τα οποία ικανοποιούν την επαγωγική σχέση

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad T_0 = 1, \quad T_1 = x.$$

α'. Υπολογίστε τα πολυώνυμα Tchebychev για $n = 2, 3$.

β'. Δείξτε ότι $\mathcal{B} = \{T_0, T_1, T_2, T_3\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}[x]_3$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με 3.

γ'. Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων ως προς τη βάση \mathcal{B} του πολυωνύμου $p(x) = 4x^3 - 2x^2 - x - 1$.