ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20

Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εργαστήριο Προβλημάτων 11

Άσκηση 11.1 Βρείτε τη διάσταση, και κατασκευάστε μια βάση των τεσσάρων υποχώρων που σχετίζονται με κάθε ένα από τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Άσκηση 11.2 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

Βρείτε βάσεις για το χώρο στηλων $\mathcal{R}(A)$, το χώρο γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$, το μηδενόχωρο $\mathcal{N}(A)$ και τον αριστερό μηδενόχωρο $\mathcal{N}(A^T)$.

Άσκηση 11.3 Βρείτε την εικόνα του γενικού σημείου $(v_1, \ldots, v_n)$ του πεδίου ορισμού, για τις απεικονίσεις T_A και T_B που ορίζονται με πολλαπλασιασμό από τα αριστερά με τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 11.4 Βρείτε τον πίνακα A στον οποίο αντιστοιχεί η γραμμική απεικόνιση

$$f(x, y) = (3x + y,\, 2y,\, x - y)\, .$$

Άσκηση 11.5 Δείξτε οτι οι παρακάτω απεικονίσεις δεν είναι γραμμικές.

α΄. $g(x, y, z) = (3x, y^2)$.

β΄. $h(u, v, w) = (v + 2, 4u)$.

Άσκηση 11.6 Βρείτε τον πίνακα που αντιστοιχεί στη γραμμική απεικόνιση η οποία:

α'. Απεικονίζει τα διανύσματα (1, 0) και (0, 1) στα διανύσματα (1, 3) και (7, 1), αντίστοιχα.

β'. Απεικονίζει τα διανύσματα (1, 0, 0), (0, 1, 0) και (0, 0, 1) στα διανύσματα (1, 5, 2, 9), (2, 6, 4, 7) και ($\sqrt{3}$, 3, 7, 1), αντίστοιχα.

Άσκηση 11.7 Εάν w_1, w_2, w_3 είναι οποιαδήποτε διανύσματα, δείξτε οτι οι διαφορές $u_1 = w_2 - w_3$, $u_2 = w_1 - w_3$ και $u_3 = w_1 - w_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένες. Βρείτε ένα γραμμικό συνδυασμό των u_1, u_2, u_3 που δίδει 0.

Άσκηση 11.8 Βρείτε μία βάση για το επίπεδο $x - 2y + 3z = 0$ στο $\mathbb{R}^3$. Στη συνέχεια βρείτε μία βάση για την τομή αυτού του επιπέδου με το (x, y)-επίπεδο.

Άσκηση 11.9 Υποθέτουμε οτι S είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^6$, διάστασης 5. Είναι τα ακόλουθα αληθή ή ψευδή;

α'. Κάθε βάση του S μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση του $\mathbb{R}^6$, προσθέτοντας ένα ακόμη διάνυσμα.

β'. Κάθε βάση του $\mathbb{R}^6$ μπορεί να περιοριστεί σε μία βάση του S, διαγράφοντας ένα διάνυσμα.

Άσκηση 11.10 Αποδείξτε οτι εάν V και W είναι τρισδιάστατοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$, τότε V και W πρέπει να έχουν ένα κοινό μη μηδενικό διάνυσμα. (Ξεκινήστε με βάσεις για τους δύο υπόχωρους, που συνολικά περιέχουν 6 διανύσματα).

Άσκηση 11.11 Εάν οι απεικονίσεις f και g είναι γραμμικές, και $f(u) = g(u) = u$, τότε $f \circ g(u)$ είναι ίσο με u ή u^2;

Άσκηση 11.12 Δείξτε οτι εάν $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε $f^2 = f \circ f$ είναι γραμμική απεικόνιση.