ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εργαστήριο Προβλημάτων 10

Άσκηση 10.1 Δίνονται τα διανύσματα:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

α΄. Δείξτε ότι το w_1 μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των v_1 και v_2, αλλά το w_2 δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των v_1 και v_2.

β΄. Εξηγήστε ποιος είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα v_1, v_2 και w_1. Εξηγήστε ποιος είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα v_1, v_2 και w_2.

γ΄. Δείξτε οτι τα διανύσματα v_1, v_2 w_1 και w_2 παράγουν τον $\mathbb{R}^3$, δηλαδή οτι για κάθε $u = (x, y, z)$ υπάρχουν a, b, c, d τέτοια ώστε $u = av_1 + bv_2 + cw_1 + dw_2$.
Ακόμα δείξτε οτι κάθε διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^3$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των v_1, v_2 w_1 και w_2 με άπειρους τρόπους.

Άσκηση 10.2 Θεωρούμε τα διανύσματα $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, 1, 2)$ και $w = (1, 0, 1)$ του $\mathbb{R}^3$. Χρησιμοποιήστε απαλοιφή Gauss σε κατάλληλο πίνακα για να ελέγξετε εάν η συλλογή u, v, w είναι γραμμικά εξαρτημένη.
Το ίδιο για τη συλλογή $(1, 2, 1)$, $(0, 2, 3)$, $(1, 5, -1)$.

Άσκηση 10.3 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω συλλογές διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητες:

α΄. $1 + x$, $x + x^2$, $1 + x^2$ στο χώρο $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων.

β΄. Οι 2×2 πίνακες $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ στο χώρο $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$.

γ΄. Οι συναρτήσεις 1, $\cos x$, $\sin x$ στο χώρο των πραγματικών συναρτήσεων.

Άσκηση 10.4 Στο διανυσματικό χώρο $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ των 2 επί 2 πινάκων πάνω από το $\mathbb{R}$, βρείτε 5 γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα (δηλαδή πίνακες) που να παράγουν όλο το χώρο. Πόσα από αυτά που βρήκατε είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

Άσκηση 10.5 Στο διανυσματικό χώρο V τα διανύσματα v, u, w είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Δείξτε οτι και τα διανύσματα $v+u$, $u+w$ και $w+v$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 10.6 Στον $\mathbb{R}^3$ βρείτε 4 διανύσματα ώστε κάθε 2 από αυτά να είναι γραμμικά ανεξάρτητα ενώ κάθε 3 από αυτά γραμμικά εξαρτημένα.

Άσκηση 10.7 Δείξτε οτι τα διανύσματα

$$u_1 = (0,\, 1,\, 1,\, 1), \quad u_2 = (1,\, 0,\, 1,\, 1), \quad u_3 = (1,\, 1,\, 0,\, 1) \quad \text{και} \quad u_4 = (1,\, 1,\, 1,\, 0)$$

αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^4$.
Εκφράστε το διάνυσμα $v = (1,\, 1,\, 1,\, 1)$ ως γραμμικό συνδυασμό των u_1, u_2, u_3, u_4.
Το ίδιο για το $w = (1,\, 0,\, 0,\, 0)$.

Άσκηση 10.8. Δίδονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$, $U = \{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) : x_1 = 2x_4,\, x_2 = x_3\}$ και $V = \{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) : x_1 = x_4 = 0\}$. Βρείτε βάσεις για τους χώρους U, V, $U \cap V$ και $U + V$.

Άσκηση 10.9 Βρείτε μία βάση και τη διάσταση στους παρακάτω διανυσματικούς χώρους

α΄. V ο χώρος των πινάκων της μορφής $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

β΄. W ο χώρος των πολυωνύμων p τέτοιων ώστε $\deg p \leq 3$ και $p(1) = 0$.

γ΄. $U = \{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 3x_2,\, x_3 = 7x_4\}$.

δ΄. S ο χώρος των συμμετρικών $n \times n$ πραγματικών πινάκων (δηλαδή όσων ικανοποιούν $A^T = A$).

Άσκηση 10.10 Θεωρήστε μία συλλογή διανυσμάτων C τέτοια ώστε κάθε 2 διανύσματα της C είναι γραμμικά εξαρτημένα. Δείξτε οτι όλα τα διανύσματα της C είναι πολλαπλάσια ενός διανύσματος.

Άσκηση 10.11 Δίδονται τρία διανύσματα u_1, u_2, $u_3 \in V$. Δείξτε οτι εάν $\langle u_1,\, u_2 \rangle = \langle u_2,\, u_3 \rangle$, τότε τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ισχύει το αντίστροφο;

Άσκηση 10.12 Εάν $X_1, \ldots, X_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι πίνακες στο χώρο $\mathcal{M}(k,\, \mathbb{R})$, και A, B είναι αντιστρέψιμοι $k \times k$ πίνακες, δείξτε οτι οι $AX_1B, \ldots, AX_nB$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι.