ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Απαντήσεις ή Υποδείξεις στο Εργαστήριο Προβλημάτων 8

Άσκηση 8.1 Σε ποιά από τα ακόλουθα σύνολα μπορείτε να ορίσετε με "φυσιολογικό" τρόπο τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό (για παράδειγμα, κατά σημείο σε ένα χώρο συναρτήσεων), ώστε να είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{R}$; Σε κάθε περίπτωση να ορίσετε τις πράξεις, να βρείτε το μηδενικό διάνυσμα και να ελέγξετε εάν το σύνολο είναι κλειστό ως προς τις πράξεις.

α΄. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, $\mathbb{C}$.

β΄. Το σύνολο των ρητών αριθμών, $\mathbb{Q}$.

γ΄. Το σύνολο των ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

δ΄. Το σύνολο όλων των φθινουσών ακολουθιών.

ε΄. Το σύνολο όλων των ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0.

ϛ΄. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από τους φυσικούς αριθμούς στους πραγματικούς αριθμούς.

ζ΄. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το σύνολο A στο $\mathbb{R}$, για οποιοδήποτε A.

η΄. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο σύνολο A, για οποιοδήποτε A.

ϑ΄. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{Z}$.

ι΄. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο $\mathbb{R}^n$, για οποιοδήποτε A.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Το σύνολο $\mathbb{Q}$ δεν είναι διανυσματικός χώρος πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς, αφού πολλαπλασιασμός με άρρητο δίδει αποτέλεσμα που δεν ανήκει στο $\mathbb{Q}$.

Το σύνολο όλων των φθινουσών ακολουθιών δεν είναι διανυσματικός χώρος, αφού πολλαπλασιασμός με αρνητικό αριθμό μπορεί να δώσει μη φθίνουσα ακολουθία.

Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο σύνολο A, για οποιοδήποτε A, δεν είναι διανυσματικός χώρος. Δεν ορίζονται οι πράξεις με κάποιο "φυσιολογικό" τρόπο.

Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{Z}$ δεν είναι διανυσματικός χώρος. Ο πολλαπλασιασμός κατά σημείο με μη ακέραιο αριθμό δεν δίδει συνάρτηση με ακέραιες τιμές.

Στα υπόλοιπα σύνολα οι πράξεις ορίζονται με ''φυσιολογικό'' τρόπο, κατά συνιστώσα για ακολουθίες και κατά σημείο για συναρτήσεις, και ικανοποιούν τα αξιώματα ενός διανυσματικού χώρου.

Άσκηση 8.2 Οταν η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ορίζονται κατά σημείο, ποιά από τα ακόλουθα σύνολα συναρτήσεων αποτελούν διανυσματικούς χώρους πάνω από το $\mathbb{R}$; Σε κάθε περίπτωση να ελέγξετε εάν το σύνολο είναι κλειστό ως προς τις κατά σημείο πράξεις.

α'. Συνεχείς συναρτήσεις από το $[0, 1]$ στο $\mathbb{R}$.

β'. Συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν $f(1) = 0$.

γ'. Συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν $g(0) = 1$.

δ'. Συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $[-1, 1]$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Είναι διανυσματικοί χώροι τα σύνολα α' και β'. Δεν είναι τα γ' και δ'.

Άσκηση 8.3 Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^2$ με τις πράξεις $(x, y) \dot{+} (x', y') = (x + x', y + y')$ και $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0)$, για $\lambda \in \mathbb{R}$. Εξετάστε εάν αυτές οι πράξεις ορίζουν στο $\mathbb{R}^2$ δομή διανυσματικού χώρου πάνω από το $\mathbb{R}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Δεν ικανοποιείται το αξίωμα Δ.Χ.6.

Άσκηση 8.4 Θεωρούμε διανυσματικό χώρο U, και υποσύνολο $X \subseteq U$. Δείξτε οτι X είναι διανυσματικός υπόχωρος του U εάν και μόνον εάν, για κάθε $x, y \in X$ και κάθε $a \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$ax + y \in X\,.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\Rightarrow$: Προφανές.
$\Leftarrow$: Εάν $ax + y \in X$ ισχύει για κάθε $a \in \mathbb{R}$, θέτοντας $a = 1$, έχουμε $x + y \in X$, συνεπώς το X είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση. Παρόμοια για τον πολλαπλασιασμό, θέτοντας $y = 0$.

Άσκηση 8.5 Δίδονται τα διανύσματα $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 2, 1)$, $x = (-2, -3, -2)$ και $y = (0, 1, -3)$ του $\mathbb{R}^3$, και οι διανυσματικοί υπόχωροι $U = \langle u, v\rangle$ και $V = \langle x, y\rangle$. Προσδιορίστε το διανυσματικό υπόχωρο $U \cap V$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Για να βρούμε την τομή λύνουμε το παρακάτω σύστημα $s(1, 1, 0)+r(1, 2, 1) = t(-2, -3, -2)+ m(0, 1, -3)$ (δείτε τα παραδείγματα που κάναμε στην τάξη ή το παράδειγμα 5.25 στις σημειώσεις σας). Αυτό καταλήγει στο σύστημα $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ r \\ t \\ m \end{bmatrix} = 0$. Κάνουμε

απαλοιφή Gauss στον πίνακα και βρίσκουμε $t + 4m = 0$ με m ελέυθερη. Άρα στην τομή έχουμε όλα τα διανύσματα της μορφής $-4m(-2, -3, -2) + m(0, 1, -3) = m(8, 13, 5)$. Άρα $U \cap V = \langle(8, 13, 5)\rangle$.

Άσκηση 8.6 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}[x]$ όλων των πολυωνύμων $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, όπου n είναι ο βαθμός του $p(x)$, θεωρούμε το υποσύνολο Q_k των πολυωνύμων βαθμού ίσου με k, και το υποσύνολο $\mathbb{R}[x]_k$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με k. Εξετάστε εάν κάθε ένα από αυτά τα σύνολα αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}[x]$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Q_k δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.
$\mathbb{R}[x]_k$ είναι διανυσματικός υπόχωρος.

Άσκηση 8.7 Θεωρούμε το σύνολο Q των πολυωνύμων $p \in \mathbb{R}[x]$ με την ιδιότητα: η παράγωγος p' διαιρεί το p. Είναι το Q διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$;
Είναι το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές $a_k = 0$ για $k \leq 3$ διανυσματικός υπόχωρος;

Απάντηση - Υπόδειξη.
Το σύνολο Q δεν είναι κενό: Ελέγξτε οτι τα μονώνυμα x^n ανήκουν στο Q.
Θεωρούμε τώρα το άθροισμα δύο μονωνύμων. Εάν $p(x) = x^2 + x$, τότε $p'(x) = 2x + 1$. Ελέγξτε οτι $2x + 1$ δεν διαιρεί το $x^2 + x$. Συμπεραίνουμε οτι το σύνολο Q δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.
Το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές $a_k = 0$ για $k \leq 3$ είναι το σύνολο των πολυωνύμων που διαιρούνται με το x^4, και είναι διανυσματικός υπόχωρος.