

## MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

### Εργαστήριο Προβλημάτων 9

**Άσκηση 9.1** Δίδονται τα διανύσματα  $u = (1, 1, 0)$ ,  $v = (1, 2, 1)$ ,  $x = (-2, -3, -2)$  και  $y = (0, 1, -3)$  του  $\mathbb{R}^3$ , και οι διανυσματικοί υπόχωροι  $A = \langle u, v \rangle$  και  $B = \langle x, y \rangle$ . Προσδιορίστε το διανυσματικό υπόχωρο  $A + B$ .

**Άσκηση 9.2** Αν  $A = \{(u, w, z) \in \mathbb{R}^3 : 3u + 2w = 0\}$  και  $B = \{(u, w, z) \in \mathbb{R}^3 : w + z = 0\}$  προσδιορίστε ένα πεπερασμένο παράγον σύνολο για καθένα από τους  $A$ ,  $B$ ,  $A \cap B$  και  $A + B$ .

**Άσκηση 9.3** Έστω  $\mathcal{M}(3, \mathbb{R})$  ο διανυσματικός χώρος των  $3 \times 3$  πινάκων. Εάν  $W$  είναι το σύνολο των άνω τριγωνικών πινάκων και  $U$  το σύνολο των κάτω τριγωνικών πινάκων, δείξτε ότι  $W$  και  $U$  είναι υπόχωροι και βρείτε ένα πεπερασμένο παράγον σύνολο για καθένα από τους  $W$ ,  $U$ ,  $W \cap U$  και  $W + U$ .

**Άσκηση 9.4** Αν  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  είναι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου  $V$ , δείξτε ότι εάν  $X \subseteq Z$  και  $Y \subseteq Z$  τότε  $X + Y \subseteq Z$ .

**Άσκηση 9.5** Θεωρούμε διανύσματα  $\{x_1, \dots, x_n\}$  και  $y_1, \dots, y_n$  σε διανυσματικό χώρο  $V$ . Υποθέτουμε ότι  $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  και επιπλέον ότι  $V = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ . Δείξτε ότι τότε τα  $\{x_1, \dots, x_n\}$  επίσης παράγουν το  $V$ .

**Άσκηση 9.6** Δείξτε ότι το σύνολο των 2 επί 2 αντιστρέψιμων πινάκων παράγει το διανυσματικό χώρο  $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ .  
Δείξτε επίσης ότι το σύνολο των 2 επί 2 μή αντιστρέψιμων πινάκων παράγει τον  $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ .

**Άσκηση 9.7** Βρείτε υπόχωρους  $V_1$  και  $V_2$  του  $\mathbb{R}^3$  τέτοιους ώστε  $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2$  αλλά  $\mathbb{R}^3 \neq V_1 \oplus V_2$ .

**Άσκηση 9.8** Έστω  $\mathbb{R}_3[x]$  ο χώρος των πολυωνύμων πάνω από το  $\mathbb{R}$  βαθμού  $\leq 3$ . Αν  $W$  ο υπόχωρος του  $\mathbb{R}_3[x]$  που παράγεται από τα  $1 + 2x$ ,  $-3x + 5x^2$  να βρεθούν δύο διαφορετικοί υπόχωροι  $Z_1$  και  $Z_2$  του  $\mathbb{R}_3[x]$  τέτοιοι ώστε  $\mathbb{R}_3[x] = W \oplus Z_1$  και  $\mathbb{R}_3[x] = W \oplus Z_2$ .