ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εργαστήριο Προβλημάτων 8

Άσκηση 8.1 Σε ποιά από τα ακόλουθα σύνολα μπορείτε να ορίσετε με "φυσιολογικό" τρόπο τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό (για παράδειγμα, κατά σημείο σε ένα χώρο συναρτήσεων), ώστε να είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{R}$; Σε κάθε περίπτωση να ορίσετε τις πράξεις, να βρείτε το μηδενικό διάνυσμα και να ελέγξετε εάν το σύνολο είναι κλειστό ως προς τις πράξεις.

α'. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, $\mathbb{C}$.

β'. Το σύνολο των ρητών αριθμών, $\mathbb{Q}$.

γ'. Το σύνολο των ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

δ'. Το σύνολο όλων των φθινουσών ακολουθιών

ε'. Το σύνολο όλων των ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0.

ϛ'. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από τους φυσικούς αριθμούς στους πραγματικούς αριθμούς.

ζ'. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το σύνολο A στο $\mathbb{R}$, για οποιοδήποτε A.

η'. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο σύνολο A, για οποιοδήποτε A.

ϑ'. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{Z}$.

ι'. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο $\mathbb{R}^n$, για οποιοδήποτε A.

Άσκηση 8.2 Οταν η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ορίζονται κατά σημείο, ποιά από τα ακόλουθα σύνολα συναρτήσεων αποτελούν διανυσματικούς χώρους πάνω από το $\mathbb{R}$; Σε κάθε περίπτωση να ελέγξετε εάν το σύνολο είναι κλειστό ως προς τις κατά σημείο πράξεις.

α'. Συνεχείς συναρτήσεις από το $[0, 1]$ στο $\mathbb{R}$.

β'. Συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν $f(1) = 0$.

γ'. Συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν $g(0) = 1$.

δ'. Συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $[-1, 1]$.

Άσκηση 8.3 Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^2$ με τις πράξεις $(x,\, y) \dot{+} (x',\, y') = (x + x',\, y + y')$ και $\lambda \cdot (x,\, y) = (\lambda x,\, 0)$, για $\lambda \in \mathbb{R}$. Εξετάστε εάν αυτές οι πράξεις ορίζουν στο $\mathbb{R}^2$ δομή διανυσματικού χώρου πάνω από το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 8.4 Θεωρούμε διανυσματικό χώρο U, και υποσύνολο $X \subseteq U$. Δείξτε οτι X είναι διανυσματικός υπόχωρος του U εάν και μόνον εάν, για κάθε $x,\, y \in X$ και κάθε $a \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$ax + y \in X\,.$$

Άσκηση 8.5 Δίδονται τα διανύσματα $u = (1,\, 1,\, 0)$, $v = (1,\, 2,\, 1)$, $x = (-2,\, -3,\, -2)$ και $y = (0,\, 1,\, -3)$ του $\mathbb{R}^3$, και οι διανυσματικοί υπόχωροι $U = \langle u,\, v\rangle$ και $V = \langle x,\, y\rangle$. Προσδιορίστε το διανυσματικό υπόχωρο $U \cap V$.

Άσκηση 8.6 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}[x]$ όλων των πολυωνύμων $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, όπου n είναι ο βαθμός του $p(x)$, θεωρούμε το υποσύνολο Q_k των πολυωνύμων βαθμού ίσου με k, και το υποσύνολο $\mathbb{R}[x]_k$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με k. Εξετάστε εάν κάθε ένα από αυτά τα σύνολα αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}[x]$.

Άσκηση 8.7 Θεωρούμε το σύνολο Q των πολυωνύμων $p \in \mathbb{R}[x]$ με την ιδιότητα: η παράγωγος p' διαιρεί το p. Είναι το Q διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$;
Είναι το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές $a_k = 0$ για $k \leq 3$ διανυσματικός υπόχωρος;