ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εργαστήριο Προβλημάτων 7

Άσκηση 7.1 Δείξτε οτι για κάθε $m \times n$ πίνακα A, εάν $A^T A = 0$ τότε $A = 0$ και $A^T = 0$. Ισχύει οτι $A = A^T$;

Άσκηση 7.2 Θεωρούμε τον άνω τριγωνικό πίνακα

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & a & b \\ 0 & d_2 & c \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

και υποθέτουμε οτι υπάρχει πίνακας V τέτοιος ώστε $VU = I$. Δείξτε οτι $d_1 d_2 d_3 \neq 0$ και οτι V είναι επίσης άνω τριγωνικός.

Άσκηση 7.3 Καταγράψετε τους 6 πίνακες μεταθέσεων 3×3, συμπεριλαμβανομένου του ταυτοτικού πίνακα I. Βρείτε τα αντίστροφα τους, τα οποία είναι επίσης πίνακες μεταθέσεως.

Άσκηση 7.4 Βρείτε ένα 2×2 πίνακα $A \neq 0$, τέτοιον ώστε $A^2 = 0$.
Βρείτε έναν 3×3 πίνακα A, τέτοιον ώστε $A^2 \neq 0$ και $A^3 = 0$.

Άσκηση 7.5 Θεωρήστε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Ποιός πίνακας μεταθέσεως P κάνει τον PA άνω τριγωνικό; Ποιοί πίνακες μεταθέσεων P_1 και P_2 κάνουν τον $P_1 A P_2$ κάτω τριγωνικό; Πολλαπλασιασμός με τον P_2 στα δεξιά μεταθέτει τις .... του A.

Άσκηση 7.6 Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία Gauss–Jordan για να βρείτε τον αντίστροφο του $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 7.7 Υποθέστε οτι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, και οτι εναλλάσσοντας τις δύο πρώτες γραμμές του A λαμβάνουμε τον πίνακα B. Είναι ο B αντιστρέψιμος; Πώς μπορούμε να πάρουμε τον B^{-1} από τον A^{-1};

Άσκηση 7.8 Κατασκευάστε έναν 3×3 πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών περιέχει τα διανύσματα (1, 1, 0) και (1, 0, 1), αλλά δεν περιέχει το (1, 1, 1). Κατασκευάστε έναν 3×3 πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών είναι μία ευθεία.

Άσκηση 7.9 Δίδονται οι πίνακες

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε τα γινόμενα $P_1LP_1^{-1}$ και $P_2LP_2^{-1}$. Είναι αυτά τα γινόμενα κάτω τριγωνικοί πίνακες; Εξηγήστε τα αποτελέσματά σας.

Άσκηση 7.10 Ποιά διανύσματα (b_1, b_2, b_3) βρίσκονται στο χώρο στηλών του A; Ποιοί γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμών του A δίδουν 0;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 7.11 Ποιά συνθήκη στα b_1, b_2, b_3 καθιστά το σύστημα επιλύσιμο; Ξεκινήστε με τον επαυξημένο πίνακα $[A \vdots b]$, και βρείτε όλες τις λύσεις όταν ικανοποιείται η συνθήκη.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & = & b_1 \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & b_2 \\ 4x & + & 9y & - & 8z & = & b_3 \end{array}$$

Άσκηση 7.12 Η επιλογή των ελεύθερων μεταβλητών, για να βρούμε όλες τις λύσεις της εξίσωσης $Ax = 0$, είναι κάπως αυθαίρετη. Η διαδικασία που περιγράψαμε, να επιλέγουμε ως ελεύθερες μεταβήτές αυτές που αντιστοιχούν σε στήλες του κλιμακωτού πίνακα που δεν έχουν οδηγό, εξασφαλίζει οτι για κάθε ελεύθερη μεταβλητή υπάρχει μία μη μηδενική λύση της εξίσωσης $Ax = 0$, και γραμμικοί συνδυασμοί αυτών των λύσεων δίδουν όλες τις λύσεις της εξίσωσης $Ax = 0$. Σε πολλές περιπτώσεις θα μπορούσαμε να έχουμε επιλέξει διαφορετικές μεταβλητές. Αλλά αυτό δεν ισχύει πάντα.

α΄. Βρείτε μία λύση της εξίσωσης $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0$ στην οποία $u = 1$, και μία λύση στην οποία $v = 1$.

β΄. Υπάρχει λύση της εξίσωσης $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0$ στην οποία $u = 1$; Υπάρχει λύση στην οποία $v = 1$;

γ΄. Το σύνολο των λύσεων του συστήματος

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 3 \\ -x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_3 + x_5 &= 5 \end{aligned}$$

είναι ένα αφινικό επίπεδο στο $\mathbb{R}^5$. Υπάρχουν 10 ζεύγη μεταβλητών (x_i, x_j), με $1 \leq i < j \leq 5$. Σε ποιά από αυτά μπορείτε να δώσετε αυθαίρετα τιμές, και να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης;