ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Απαντήσεις ή Υποδείξεις στο Εργαστήριο Προβλημάτων 6

Άσκηση 6.1 Βρείτε όλα τα $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ που ικανοποιούν το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_2 + 6x_4 &= 2\,. \end{aligned}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Το σύνολο των λύσεων είναι ένας τριδιάστατος αφινικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$: Όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}^4$ της μορφής $(x_1, 1-3x_4, x_3, x_4)$. Ας δούμε πώς προκύπτει αυτό το αποτέλεσμα από τη διαδικασία της απαλοιφής.

Ο επαυξημένος πίνακας $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$ μετά την απαλοιφή γίνεται

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Βασική μεταβλητή είναι η x_2, και x_1, x_3, x_4 είναι ελεύθερες μεταβλητές.

Θέτοντας τις ελεύθερες μεταβλητές ίσες με 0, βρίσκουμε μία ειδική λύση του συστήματος, $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0, 0)$. Θέτοντας διαδοχικά μία από τις ελεύθερες μεταβλητές ίση με 1 και τις υπόλοιπες ίσες με 0 βρίσκουμε τρείς γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης $Ax = 0$.

Η γενική λύση είναι

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6.2 Είναι τα ακόλουθα αληθή ή ψευδή; Δώστε αντιπαράδειγμα εάν είναι ψευδή και αιτιολόγηση εάν είναι αληθή.

α΄. Ένας τετραγωνικός πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

β′. Ένας αντιστρέψιμος πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

γ′. Ένας $m \times n$ πίνακας δεν έχει περισσότερες από n βασικές μεταβλητές.

δ′. Ένας $m \times n$ πίνακας δεν έχει περισσότερες από m βασικές μεταβλητές.

Άσκηση 6.3 Εφαρμόστε την απαλοιφή Gauss στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Προσδιορίσετε τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος. Βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος ως άθροισμα μίας ειδικής λύσης και των λύσεων του ομογενούς συστήματος.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ελεύθερη μεταβλητή είναι η x_4. Η γενική λύση είναι

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6.4 Εφαρμόστε την απαλοιφή Gauss στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -7 \\ -1 & -2 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Προσδιορίσετε τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος. Βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος $Ax = b$ ως άθροισμα μίας ειδικής λύσης και των λύσεων του ομογενούς συστήματος. Εάν το σύστημα δεν έχει λύσεις, αλλάξτε μία συνιστώσα του διανύσματος b ώστε αυτό να ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα A, και βρείτε τις λύσεις του νέου συστήματος.

Άσκηση 6.5 Για τους πίνακες:

α′.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

β′.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

γ′.

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

δ′.

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συνιστώσες b_j του διανύσματος b ώστε να έχει λύση η εξίσωση $A_i x = b$. Σε κάθε περίπτωση, επιλέξτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα b που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες, και βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος, ως άθροισμα μίας ειδικής λύσης και των λύσεων του ομογενούς συστήματος.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Η εξίσωση $A_1 x = b$ έχει λύσεις για όλα τα b.

Για να έχει λύση η εξίσωση $A_3 x = b$, πρέπει να ισχύει $b_2 - 2b_1 = 0$. Εάν $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, η γενική λύση της εξίσωσης $A_3 x = b$ είναι

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Για να έχει λύση η εξίσωση $A_5 x = b$, πρέπει να ισχύει $b_3 = b_1 - b_2$ (Γιατί;). Εάν $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, η γενική λύση της εξίσωσης $A_5 x = b$ είναι

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6.6 Βρείτε έναν 2×2 πίνακα του οποίου ο μηδενοχώρος είναι ίσος με το χώρο στηλών.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Θέλουμε έναν 2×2 πίνακα τάξης 1 (γιατί;), δηλαδή $\begin{bmatrix} \lambda a & a \\ \lambda b & b \end{bmatrix}$ τέτοιο ώστε

$$\begin{bmatrix} \lambda a & a \\ \lambda b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0\,.$$

Υπάρχουν άπειρες δυνατές επιλογές, για παράδειγμα ο πίνακας $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 6.7 Βρείτε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών περιέχει το $(1, 1, 1)$ και ο μηδενοχώρος αποτελείται από τα πολλαπλάσια του $(1, 1, 1, 1)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Θέλουμε έναν 3×4 πίνακα τάξης 3 (γιατί;). Αφού ο μηδενοχώρος περιέχει το $(1, 1, 1, 1)$, το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι 0. Υπάρχουν άπειρες δυνατές επιλογές, για παράδειγμα ο πίνακας $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.