ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Απαντήσεις ή Υποδείξεις στο Εργαστήριο Προβλημάτων 5

Άσκηση 5.1 Ποιά από τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικοί υπόχωροι; Ποιά είναι αφινικοί υπόχωροι;

α′. $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1\}$.

β′. $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

γ′. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + yz = 0\}$.

δ′. $N = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y > z\}$.

ε′. $P = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 - 3x_2 = 0\}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. Δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος: δεν περιέχει το μηδενικό διάνυσμα. Είναι αφινικός υπόχωρος.

β′. Είναι διανυσματικός υπόχωρος.

γ′. Δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος: $(1, 1, -1) \in M$ αλλά $(2, 2, -2) \notin M$. Αφού περιέχει το μηδενικό διάνυσμα, αλλά δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος, δεν είναι ούτε αφινικός υπόχωρος.

Άσκηση 5.2 Βρείτε τον κλιμακωτό πίνακα U, και τους πίνακες P και L έτσι ώστε $PA = LU$, για τους ακόλουθους πίνακες:

α′.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

β′.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

γ΄.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

δ΄.

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

ε΄.

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α΄. Δεν χρειάζονται εναλλαγές, άρα $P = I$. Κατά την απαλοιφή αφαιρείται 2 φορές η πρώτη γραμμή από τη δεύτερη.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

β΄.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

γ΄.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δ΄. Εναλλάσσονται οι δύο πρώτες γραμμές, και αφαιρείται 3 φορές η πρώτη γραμμή από την τέταρτη.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ε΄. Εναλλάσσονται οι δύο πρώτες γραμμές, κατόπιν προστίθεται η πρώτη γραμμή στην τρίτη, και αφαιρείται η δεύτερη γραμμή από την τρίτη.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 5.3 Για τους πίνακες A_1, A_3 και A_5 της Άσκησης 5.2 προσδιορίστε τις ελεύθερες μεταβλητές της εξίσωσης $A_i x = 0$ και βρείτε όλες της τις λύσεις.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Για τον πίνακα A_1 παρατηρούμε οτι ο πίνακας έχει μόνον ένα οδηγό, στη θέση a_{12}. Άρα η τάξη του πίνακα είναι 1.

Η πρώτη, τρίτη και τέταρτη μεταβλητή είναι ελεύθερες. Άρα υπάρχουν τρεις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $A_1 x = 0$, και όλες οι λύσεις είναι γραμμικοί συνδυασμοί αυτών:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ y \\ z \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Η τάξη του πίνακα A_3 είναι 1. Η γενική λύση της εξίσωσης $A_3 x = 0$ είναι

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Η τάξη του πίνακα A_5 είναι 2. Η γενική λύση της εξίσωσης $A_5 x = 0$ είναι

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$