ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Απαντήσεις ή Υποδείξεις στο Εργαστήριο Προβλημάτων 4

Άσκηση 4.1 Παραγοντοποιήστε τον πίνακα A σε γινόμενο LU, και γράψτε το άνω τριγωνικό σύστημα $Ux = c$ που προκύπτει μετά την απαλοιφή, για το σύστημα:

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

Άρα $c = Ux = L^{-1}Ax = L^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$

Άσκηση 4.2 Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία Gauss–Jordan για να βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων, εάν υπάρχουν

$$(\alpha') \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad (\beta') \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\gamma') \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

(α′)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(β′)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & -2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

(γ′) Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ είναι ιδιόμορφος: δεν υπάρχει 3ος οδηγός.

Άσκηση 4.3 Εφαρμόστε απαλοιφή για να βρείτε τους παράγοντες L και U των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

Απαλοιφή στον $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to E^{-1}A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \to F^{-1}E^{-1}A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{15}{6} \end{bmatrix}$$

όπου $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$.

Άρα $L = EF = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ και $U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{15}{6} \end{bmatrix}$.

Άσκηση 4.4 Βρείτε τον αντίστροφο του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 4.5 Βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα στοιχεία των πινάκων A και B, ώστε αυτοί να είναι αντιστρέψιμοι.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{bmatrix} , \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

Εναλλάσσουμε 1η και 3η γραμμή στον A και βρίσκουμε οδηγούς f, e και c. Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν $cef \neq 0$.

Στον B, εάν $a \neq 0$, ο δεύτερος οδηγός είναι $d - \frac{cb}{a}$ και ο τρίτος οδηγός e. Εάν $a = 0$ και $c \neq 0$, ο δεύτερος οδηγός είναι b και ο τρίτος οδηγός e. Άρα ο B είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν $e(ad - bc) \neq 0$.

Άσκηση 4.6 Βρείτε τους πίνακες E^2, E^8 και E^{-1} για το στοιχειώδη πίνακα

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Πολλαπλασιασμός από τα αριστερά με τον πίνακα E προσθέτει 6 φορές την πρώτη γραμμή στη δεύτερη. Τι συμβαίνει όταν επαναλάβουμε αυτή τη διαδικασία 8 φορές; Ποιά είναι η αντίστροφη αυτής της διαδικασίας;

Άσκηση 4.7 E είναι ο 3×3 πίνακας που αφαιρεί την πρώτη από την τρίτη γραμμή, και P ο πίνακας εναλλαγής που εναλλάσσει τη δεύτερη με την τρίτη γραμμή.

α'. Βρείτε τους πίνακες E και P, και υπολογίστε τον πίνακα E' για τον οποίο $PE' = EP$.

β'. Περιγράψτε τη δράση του πίνακα E'.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$P^{-1} = P$. Άρα $E' = PEP$. Πολλαπλασιάζουμε και βρίσκουμε οτι E' είναι ο πίνακας που αφαιρεί την πρώτη από τη δεύτερη γραμμή.

Άσκηση 4.8 Θεωρούμε οτι οι στήλες του $n \times n$ πίνακα A είναι οι $n \times 1$ πίνακες C_1, C_2, $\ldots$, C_n, και οι γραμμές του $n \times n$ πίνακα B είναι οι $1 \times n$ πίνακες R_1, R_2, $\ldots$, R_n. Το γινόμενο $C_i R_i$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας. Εκφράστε το γινόμενο AB ως άθροισμα τέτοιων πινάκων.