ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Απαντήσεις ή Υποδείξεις στο Εργαστήριο Προβλημάτων 3

Άσκηση 3.1 Δίδονται πίνακες A, B, C, D με τα ακόλουθα μεγέθη: $A : 5\times 13$, $B : 13\times 4$, $C : 4 \times 20$ και $D : 20 \times 8$. Βρείτε τον οικονομικότερο τρόπο να υπολογίσετε το γινόμενο $ABCD$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Για τον πολλαπλασιασμό $(AB)(CD)$ απαιτούνται $5 \cdot 13^2 \cdot 4 + 4 \cdot 20^2 \cdot 8 + 5 \cdot 4^2 \cdot 8$ πράξεις.
Για τον πολλαπλασιασμό $(A(BC))D$ απαιτούνται $13 \cdot 4^2 \cdot 20 + 5 \cdot 13^2 \cdot 20 + 5 \cdot 20^2 \cdot 8$ πράξεις.
Πώς αλλοιώς μπορείτε να υπολογίσετε το γινόμενο; Πόσες πράξεις χρειάζονται σε κάθε περίπτωση;

Άσκηση 3.2 Εάν ο αντίστροφος του A^2 είναι B, δείξτε οτι ο αντίστροφος του A είναι AB. (Αυτό σημαίνει οτι εάν ο A^2 είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A είναι επίσης αντιστρέψιμος).

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ελέγχουμε οτι $A(AB) = I$. Αφού A είναι τετραγωνικός, ισχύει και $(AB)A = I$.

Άσκηση 3.3 Οι πίνακες A, B, C, D και U ικανοποιούν τη σχέση $BAC = DU$. Εάν B, C και D είναι αντιστρέψιμοι, εκφράστε τον A ως γινόμενο πινάκων. Εάν ο A είναι επίσης αντιστρέψιμος, δείξτε οτι ο U είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον αντίστροφο U^{-1}.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Πολλαπλασιάζουμε το BAC από τα αριστερά με B^{-1} και από τα δεξιά με C^{-1}. Βρίσκουμε $A = B^{-1}DUC^{-1}$.
Γιατί εάν A είναι αντιστρέψιμος, U είναι επίσης αντιστρέψιμος;

Άσκηση 3.4 Συμπληρώστε τα $*$ στους ακόλουθους πίνακες, έτσι ώστε να είναι συμμετρικοί:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ * & 6 & * \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} -3 & * & 8 & 9 \\ -4 & 7 & * & 7 \\ * & 2 & 6 & 4 \\ * & 7 & * & 9 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.5 Δίδονται πίνακες A σχήματος 4×1, B σχήματος 2×3, C σχήματος 2×4

και D σχήματος 1×3. Ποιοί από τους ακόλουθους πίνακες ορίζονται, και τί σχήμα έχουν;

α΄. ADB^T β΄. $C^TB - 5AD$

γ΄. $4CA - (CA)^2$ δ΄. $(ADB^TC)^2 - I_4$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Παρατηρήστε οτι το πολλαπλάσιο ενός πίνακα, όπως $5AD$, έχει το ίδιο σχήμα με τον πίνακα. Επίσης το τετράγωνο ορίζεται μόνον όταν $n = m$.

Άσκηση 3.6 Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcrcr} u & + & v & + & w & = & -2 \\ 3u & + & 3v & - & w & = & 6 \\ u & - & v & + & w & = & -1 \end{array}$$

α΄. Εφαρμόστε απαλοιφή Gauss στο παραπάνω σύστημα (μπορεί να χρειαστεί να αλλάξετε τη σειρά των εξισώσεων σε κάποιο βήμα).

β΄. Αλλάξτε το συντελεστή του v στην τρίτη εξίσωση, ώστε να πάρετε ένα σύστημα που δεν έχει λύση.

Άσκηση 3.7 Βρείτε τη λύση του ακόλουθου συστήματος, επιλύοντας τα δύο τριγωνικά συστήματα, $Lc = b$ και $Ux = c$, χωρίς να υπολογίσετε το γινόμενο LU.

$$LUx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = b.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
$Lc = b$, $c = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.
$Ux = c$, $x = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 3.8 Ο πολλαπλασιασμός σε μπλόκ χωρίζει τους πίνακες σε υποπίνακες. Εάν το σχήμα των υποπινάκων επιτρέπει τον πολλαπλασιασμό τους, τότε αυτός δίδει το σωστό αποτέλεσμα.

α΄. Αντικαταστείστε 2×2 πίνακες για τα A και C, 2×1 πίνακα για το B και 1×2 πίνακα για το D και επαληθεύστε οτι

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC + BD \end{bmatrix}.$$

β΄. Αντικαταστείστε τα $*$ με αριθμούς, και επαληθεύστε τον πολλαπλασιασμό σε μπλόκ

$$\left[\begin{array}{cc:c} * & * & * \\ * & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & * \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc:c} * & * & * \\ * & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & * \end{array}\right]$$

Άσκηση 3.9 Εφαρμόστε την απαλοιφή Gauss για να βρείτε, εάν υπάρχουν, τους n οδηγούς στους ακόλουθους πίνακες.

$$(\alpha') \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\beta') \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\gamma') \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
(α΄)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ οδηγοί}: 1, 2, 3\,.$$

(β΄) Εναλλαγή 1η/2η γραμμή και 2η/3η γραμμή.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ οδηγοί}: 1, 2, 3, 1\,.$$

(γ΄)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εναλλαγή 3η/5η γραμμή, αλλά δεν υπάρχει 5ος οδηγός.