

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Απαντήσεις ή Υποδείξεις στο Εργαστήριο Προβλημάτων 2

Άσκηση 2.1 Εφαρμόστε τη διαδικασία της απαλοιφής για να εξετάσετε εάν έχουν μοναδική, καμία ή άπειρες λύσεις τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων.

$$\begin{array}{rcl} 2u - 3v & = & 3 \\ 4u - 6v + w & = & 7 \\ 2u - v - 3w & = & 5 \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} 2u - 3v & = & 3 \\ 4u - 6v + w & = & 7 \\ 2u - 3v - 3w & = & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2u - 3v & = & 3 \\ 4u - 5v + 2w & = & 7 \\ 2u - v + 4w & = & 5 \end{array}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. Μοναδική λύση. β'. Καμία λύση. γ'. Άπειρες λύσεις.

Άσκηση 2.2 Εάν τα στοιχεία του πίνακα A είναι a_{ij} , χρησιμοποιήστε το συμβολισμό των δεικτών για να γράψετε

α'. τον πρώτο οδηγό

β'. τον πολλαπλασιαστή λ_{i1} της πρώτης γραμμής όταν την αφαιρούμε από την γραμμή i

γ'. Το νέο στοιχείο που αντικαθιστά το a_{ij} μετά αυτή την αφαίρεση.

δ'. τον δεύτερο οδηγό.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. Ο πρώτος οδηγός είναι το a_{11} εάν είναι $\neq 0$.

β'. ο πολλαπλασιαστής $\lambda_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$.

γ'. Το νέο στοιχείο που αντικαθιστά το a_{ij} είναι $a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}$.

δ'. Ο δεύτερος οδηγός είναι το νέο στοιχείο στη θέση (2,2), $a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}$, εφόσον δεν είναι μηδέν.

Άσκηση 2.3 Υπολογίστε τα δύο γινόμενα πινάκων με μία γραμμή ή μία στήλη:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.4 Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ \pi/2 \\ \sqrt{2}/3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 \cos(\pi/6) & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.5 Γράψτε τους 3 επί 3 πίνακες A και B με στοιχεία

$$a_{ij} = i - j \quad \text{και} \quad b_{ij} = \frac{1}{j}.$$

και υπολογίστε τα γινόμενα AB , BA και A^2 .

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Υπολογίστε τα γινόμενα.

Άσκηση 2.6 Θεωρήστε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

α'. Εκφράστε τη δεύτερη στήλη του γινομένου AB ως γραμμικό συνδυασμό των στηλών του A .

β'. Εκφράστε τη δεύτερη γραμμή του γινομένου AB ως γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του B .

Απάντηση - Υπόδειξη.

Η δεύτερη στήλη του γινομένου AB είναι ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A με συντελεστές τις συνιστώσες της δεύτερης στήλης του B . Στη συγκεκριμένη περίπτωση

$$5 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Η δεύτερη γραμμή του γινομένου AB είναι ο γραμμικός συνδυασμός των ... με συντελεστές ...

Άσκηση 2.7 Αληθές ή ψευδές; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

- α'. Εάν η πρώτη και η τρίτη στήλη του πίνακα A είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και την τρίτη στήλη του πίνακα AB .
- β'. Εάν η πρώτη και η τρίτη στήλη του πίνακα B είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και την τρίτη στήλη του πίνακα AB .
- γ'. Εάν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του πίνακα A είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και την τρίτη γραμμή του πίνακα AB .
- δ'. Εάν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του πίνακα B είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και την τρίτη γραμμή του πίνακα AB .

Άσκηση 2.8 Βρείτε τις τιμές των a και b για τις οποίες το παρακάτω σύστημα

- α'. δεν έχει λύση
- β'. έχει άπειρες λύσεις
- γ'. έχει μόνον μια λύση.

Υπολογίστε τη λύση στην περίπτωση γ'.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{bmatrix}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

- α'. δεν έχει λύση όταν $a = 1$ και $b \neq \frac{5}{3}$.
- β'. έχει άπειρες λύσεις όταν $a = 1$ και $b = \frac{5}{3}$
- γ'. έχει μόνον μια λύση όταν $a \neq 1$.