ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Απαντήσεις ή Υποδείξεις στο Εργαστήριο Προβλημάτων 1

Άσκηση 1.1 Θεωρήστε ένα κανονικό εξάγωνο $ABCDEF$, με κέντρο O. Εάν $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$, βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{v}, \vec{w})$. Πώς διαφέρουν αυτές από τις συντεταγμένες ως προς το σύστημα $(O, \vec{w}, \vec{v})$; Ως προς το σύστημα $(O, \frac{1}{2}\vec{v}, \vec{w})$;

Άσκηση 1.2 Δείξτε οτι εάν $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι μη συγγραμμικά διανύσματα και $a\overrightarrow{OA} = b\overrightarrow{OB}$, τότε $a = 0$ και $b = 0$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Γεωμετρική προσέγγιση: Αφού τα $a\overrightarrow{OA}$ και $b\overrightarrow{OB}$ είναι ίσα και έχουν κοινή αρχή, θα έχουν και κοινό πέρας. Αλλά το πέρας του $a\overrightarrow{OA}$ βρίσκεται στην ευθεία OA, ενώ το πέρας του $b\overrightarrow{OB}$ βρίσκεται στην ευθεια OB. Αυτές οι ευθείες δεν συμπίπτουν, αφού τα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ δεν είναι συγγραμμικά, άρα έχουν μόνο κοινό σημείο το O. Συμπεραίνουμε οτι το κοινό πέρας των $a\overrightarrow{OA}$ και $b\overrightarrow{OB}$ είναι το σημείο O, το ίδιο με την αρχή τους, άρα αυτά τα διανύσματα είναι μηδενικά. Αφού $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ δεν είναι συγγραμμικά, κανένα από αυτά δεν είναι μηδενικό, συνεπώς οι αριθμοί a και b είναι μηδέν.
Αλγεβρική προσέγγιση: Υποθέτουμε οτι ένα από τα a, b είναι μη μηδενικό, έστω $a \neq 0$. Τότε $\overrightarrow{OA} = \frac{b}{a}\overrightarrow{OB}$. Άτοπο, αφού υποθέσαμε οτι $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ δεν είναι συγγραμμικά. Άρα a και b είναι 0.

Άσκηση 1.3 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 1.2 για να δείξετε οτι οι συντεταγμένες ενός διανύσματος $\overrightarrow{OP}$ του επιπέδου ως προς ένα σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$ είναι μοναδικές: εάν (s, t) και (x, y) είναι συντεταγμένες του ίδιου διανύσματος $\overrightarrow{OP}$, τότε $s = x$ και $t = y$.

Άσκηση 1.4 Δίδεται (μη εκφυλισμένο) παραλληλόγραμμο $OBCD$, και σημεία E, F τέτοια ώστε $\overrightarrow{OE} = a\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{OF} = b\overrightarrow{OD}$, με $b \neq 1$. Δείξτε οτι τα σημεία E, C και F είναι συγγραμμικά εάν και μόνον εάν $a = \dfrac{b}{b-1}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Θεωρούμε διανύσματα $\overrightarrow{OP}$ και $\overrightarrow{OQ}$ τέτοια ώστε $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}$ και $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OQ}$. Παρατηρούμε οτι τα σημεία E, C, F είναι συγγραμμικά, εάν και μόνον εάν τα σημεία P, O, Q είναι συγγραμμικά.

Πρώτα δείχνουμε την κατεύθυνση "$\Rightarrow$": Εάν E, C, F είναι συγγραμμικά τότε $a = \frac{b}{b-1}$. Από το παραλληλόγραμμο $OBCD$ και τις σχέσεις $\overrightarrow{OE} = a\,\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{OF} = b\,\overrightarrow{OD}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} \\ &= a\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \\ &= (a-1)\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC} \\ &= b\overrightarrow{OD} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \\ &= (b-1)\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}.\end{aligned}$$

Αφού P, O, Q είναι συγγραμμικά, υπάρχει λ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OP} = \lambda\,\overrightarrow{OQ}$. Άρα

$$(a-1)\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \lambda((b-1)\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB})\,,$$

δηλαδή

$$(a-1+\lambda)\overrightarrow{OB} = (\lambda(b-1)+1)\overrightarrow{OD}\,.$$

Αφού τα $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{OD}$ δεν είναι συγγραμμικά, από την Άσκηση 1.2 έχουμε οτι $a-1+\lambda = 0$ και $\lambda(b-1)+1 = 0$. Απαλείφοντας το λ βρίσκουμε οτι $a = \frac{b}{b-1}$.

Κατόπιν δείχνουμε την κατεύθυνση "$\Leftarrow$": Υποθέτουμε οτι $\overrightarrow{OF} = b\,\overrightarrow{OD}$ και $\overrightarrow{OE} = \frac{b}{b-1}\,\overrightarrow{OB}$ και δείχνουμε οτι E, C, F είναι συγγραμμικά.

Θεωρούμε πάλι τα διανύσματα $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC}$ και $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC}$. Έχουμε

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC} = (b-1)\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$$

και

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} = \left(\frac{b}{b-1} - 1\right)\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}\,.$$

Συμπεραίνουμε οτι $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{b-1}\overrightarrow{OQ}$. Τα P, O, Q είναι συγγραμμικά, άρα και τα E, C, F είναι συγγραμμικά.

Άσκηση 1.5 Βρείτε γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

τέτοιους ώστε

α΄. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2.

β΄. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη συνιστώσα να είναι 2.

γ΄. Η τρίτη συνιστώσα να είναι 1.

Είναι αυτά τα αποτελέσματα μοναδικά;

Άσκηση 1.6 Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2u & - & 3v & & & = & 3 \\ 4u & - & 5v & + & w & = & 7 \\ 2u & - & v & - & 3w & = & 5 \end{array}$$

α΄. Κάθε εξίσωση παριστάνει ένα επίπεδο στο τριδιάστατο χώρο με σύστημα συντεταγμένων u, v, w. Βρείτε τα σημεία τομής κάθε επιπέδου με τους άξονες, και προσπαθήστε να σχεδιάσετε μέρος των τριών επιπέδων στο σχήμα σας.

β΄. Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να βρείτε τη λύση του συστήματος: αφαιρέστε ένα πολλαπλάσιο της πρώτης εξίσωσης από τη δεύτερη, έτσι ώστε να μηδενιστεί ο συντελεστής του u στη δεύτερη εξίσωση. Κάνετε το ίδιο για την τρίτη εξίσωση. Κατόπιν αφαιρέστε ένα πολλαπλάσιο της (νέας) δεύτερης εξίσωσης από την (νέα) τρίτη εξίσωση, έτσι ώστε να μηδενιστεί ο συντελεστής του v στην τρίτη εξίσωση. Βρείτε το w και εφαρμόστε ανάδρομη αντικατάσταση για να βρείτε το v και το u.