ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ, Τμήμα Α

Άσκηση για διόρθωση 5, 30/10/2019

Ονοματεπώνυμο: ....

Παραγοντοποιήστε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ σε γινόμενο PLU, όπου P είναι πίνακας μετάθεσης, L είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο και U είναι άνω τριγωνικός πίνακας.

Σχόλια διορθωτή

Σχόλια διδάσκοντος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ, Τμήμα Α

Άσκηση για διόρθωση 4, 23/10/2019

Ονοματεπώνυμο: ....

Υποθέστε οτι A είναι $m \times m$ συμμετρικός πίνακας και R είναι $m \times n$ πίνακας. Δείξτε οτι

α'. $R^T AR$ είναι $n \times n$ συμμετρικός πίνακας.

β'. Τα στοιχεία στη διαγώνιο του $n \times n$ πίνακα $R^T R$ είναι ~~θετικοί~~ μη αρνητικοί αριθμοί.

(*Κατασκευάστε ένα παράδειγμα για* $m = 3$ *και* $n = 2$, *και χρησιμοποιήστε το για να κατανοήσετε τα ερωτήματα. Κατόπιν χρησιμοποιήστε το συμβολισμό του αθροίσματος* $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ *για να αποδείξετε τους ισχυρισμούς για κάθε* m *και* n.)

Σχόλια διορθωτή

Για το παράδειγμα χρησιμοποιήστε πίνακες με μικρούς αριθμούς, όπως $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

α) Απόδειξη: Εστω $R = [r_{ij}]$, $A = [a_{ij}]$, $R^T A = [c_{ij}]$.

Τότε $c_{ij} = \sum (R^T)_{ik} a_{kj} = \sum r_{ki} a_{kj}$.

$$(R^T A R)_{ip} = \sum_{\ell} c_{i\ell} r_{\ell p} = \sum_{\ell} \sum_{k} r_{ki} a_{k\ell} r_{\ell p}$$

$$(R^T A R)_{pi} = \sum_{\ell} c_{p\ell} r_{\ell i} = \sum_{\ell} \sum_{k} r_{kp} a_{k\ell} r_{\ell i}$$

$$= \sum_{\ell} \sum_{k} r_{\ell p} a_{\ell k} r_{ki} .$$

Αλλά $a_{\ell k} = a_{k\ell}$, άρα $(R^T A R)_{ip} = (R^T A R)_{pi}$

β) $(R^T R)_{ii} = \sum_{k} (R^T)_{ik} (R)_{ki} = \sum r_{ki}^2 \geq 0$.

Σχόλια διδάσκοντος

Το (α) μπορείτε να το αποδείξετε πιο σύντομα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ανάστροφου γινομένου.