ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εργαστήριο Προβλημάτων 6

Άσκηση 6.1 Βρείτε όλα τα $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ που ικανοποιούν το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_2 + 6x_4 &= 2\,. \end{aligned}$$

Άσκηση 6.2 Είναι τα ακόλουθα αληθή ή ψευδή; Δώστε αντιπαράδειγμα εάν είναι ψευδή και αιτιολόγηση εάν είναι αληθή.

α΄. Ένας τετραγωνικός πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

β΄. Ένας αντιστρέψιμος πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

γ΄. Ένας $m \times n$ πίνακας δεν έχει περισσότερες από n βασικές μεταβλητές.

δ΄. Ένας $m \times n$ πίνακας δεν έχει περισσότερες από m βασικές μεταβλητές.

Άσκηση 6.3 Εφαρμόστε την απαλοιφή Gauss στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Προσδιορίσετε τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος. Βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος ως άθροισμα μίας ειδικής λύσης και των λύσεων του ομογενούς συστήματος.

Άσκηση 6.4 Εφαρμόστε την απαλοιφή Gauss στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -7 \\ -1 & -2 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Προσδιορίσετε τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος. Βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος $Ax = b$ ως άθροισμα μίας ειδικής λύσης και των λύσεων του ομογενούς συστήματος. Εάν το σύστημα δεν έχει λύσεις, αλλάξτε μία συνιστώσα του διανύσματος

b ώστε αυτό να ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα A, και βρείτε τις λύσεις του νέου συστήματος.

Άσκηση 6.5 Για τους πίνακες:

α΄.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

β΄.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

γ΄.

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

δ΄.

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συνιστώσες b_j του διανύσματος b ώστε να έχει λύση η εξίσωση $A_i x = b$. Σε κάθε περίπτωση, επιλέξτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα b που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες, και βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος, ως άθροισμα μίας ειδικής λύσης και των λύσεων του ομογενούς συστήματος.

Άσκηση 6.6 Βρείτε έναν 2×2 πίνακα του οποίου ο μηδενοχώρος είναι ίσος με το χώρο στηλών.

Άσκηση 6.7 Βρείτε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών περιέχει το $(1, 1, 1)$ και ο μηδενοχώρος αποτελείται από τα πολλαπλάσια του $(1, 1, 1, 1)$.