

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εργαστήριο Προβλημάτων 4

Άσκηση 4.1 Παραγοντοποιήστε τον πίνακα A σε γινόμενο LU , και γράψτε το άνω τριγωνικό σύστημα $Ux = c$ που προκύπτει μετά την απαλοιφή, για το σύστημα:

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 4.2 Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία Gauss–Jordan για να βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων, εάν υπάρχουν

$$(\alpha') \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad (\beta') \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\gamma') \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4.3 Εφαρμόστε απαλοιφή για να βρείτε τους παράγοντες L και U των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4.4 Βρείτε τον αντίστροφο του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 4.5 Βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα στοιχεία των πινάκων A και B , ώστε αυτοί να είναι αντιστρέψιμοι.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 4.6 Βρείτε τους πίνακες E^2 , E^8 και E^{-1} για το στοιχειώδη πίνακα

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 4.7 E είναι ο 3×3 πίνακας που αφαιρεί την πρώτη από την τρίτη γραμμή, και P ο πίνακας εναλλαγής που εναλλάσσει τη δεύτερη με την τρίτη γραμμή.

α'. Βρείτε τους πίνακες E και P , και υπολογίστε τον πίνακα E' για τον οποίο $PE' = EP$.

β'. Περιγράψτε τη δράση του πίνακα E' .

Άσκηση 4.8 Θεωρούμε ότι οι στήλες του $n \times n$ πίνακα A είναι οι $n \times 1$ πίνακες C_1, C_2, \dots, C_n , και οι γραμμές του $n \times n$ πίνακα B είναι οι $1 \times n$ πίνακες R_1, R_2, \dots, R_n . Το γινόμενο $C_i R_i$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας. Εκφράστε το γινόμενο AB ως άθροισμα τέτοιων πινάκων.