

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εργαστήριο Προβλημάτων 3

Άσκηση 3.1 Δίδονται πίνακες A, B, C, D με τα ακόλουθα μεγέθη: $A : 5 \times 13, B : 13 \times 4, C : 4 \times 20$ και $D : 20 \times 8$. Βρείτε τον οικονομικότερο τρόπο να υπολογίσετε το γινόμενο $ABCD$.

Άσκηση 3.2 Εάν ο αντίστροφος του A^2 είναι B , δείξτε ότι ο αντίστροφος του A είναι AB . (Αυτό σημαίνει ότι εάν ο A^2 είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A είναι επίσης αντιστρέψιμος).

Άσκηση 3.3 Οι πίνακες A, B, C, D και U ικανοποιούν τη σχέση $BAC = DU$. Εάν B, C και D είναι αντιστρέψιμοι, εκφράστε τον A ως γινόμενο πινάκων. Εάν ο A είναι επίσης αντιστρέψιμος, δείξτε ότι ο U είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον αντίστροφο U^{-1} .

Άσκηση 3.4 Συμπληρώστε τα * στους ακόλουθους πίνακες, έτσι ώστε να είναι συμμετρικοί:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ * & 6 & * \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & * & 8 & 9 \\ -4 & 7 & * & 7 \\ * & 2 & 6 & 4 \\ * & 7 & * & 9 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.5 Δίδονται πίνακες A σχήματος $4 \times 1, B$ σχήματος $2 \times 3, C$ σχήματος 2×4 και D σχήματος 1×3 . Ποιοί από τους ακόλουθους πίνακες ορίζονται, και τί σχήμα έχουν;

$$\begin{array}{ll} \alpha'. ADB^T & \beta'. C^T B - 5AD \\ \gamma'. 4CA - (CA)^2 & \delta'. (ADB^T C)^2 - I_4 \end{array}$$

Άσκηση 3.6 Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcl} u + v + w & = & -2 \\ 3u + 3v - w & = & 6 \\ u - v + w & = & -1 \end{array}$$

α'. Εφαρμόστε απαλοιφή Gauss στο παραπάνω σύστημα (μπορεί να χρειαστεί να αλλάξετε τη σειρά των εξισώσεων σε κάποιο βήμα).

β'. Αλλάξτε το συντελεστή του v στην τρίτη εξίσωση, ώστε να πάρετε ένα σύστημα που δεν έχει λύση.

Άσκηση 3.7 Βρείτε τη λύση του ακόλουθου συστήματος, επιλύοντας τα δύο τριγωνικά συστήματα, $Lc = b$ και $Ux = c$, χωρίς να υπολογίσετε το γινόμενο LU .

$$LUx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = b.$$

Άσκηση 3.8 Ο πολλαπλασιασμός σε μπλόκ χωρίζει τους πίνακες σε υποπίνακες. Εάν το σχήμα των υποπινάκων επιτρέπει τον πολλαπλασιασμό τους, τότε αυτός δίνει το σωστό αποτέλεσμα.

α'. Αντικαταστήστε 2×2 πίνακες για τα A και C , 2×1 πίνακα για το B και 1×2 πίνακα για το D και επαληθεύστε ότι

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC + BD \end{bmatrix}.$$

β'. Αντικαταστήστε τα $*$ με αριθμούς, και επαληθεύστε τον πολλαπλασιασμό σε μπλόκ

$$\begin{bmatrix} * & * & \vdots & * \\ * & * & \vdots & * \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ * & * & \vdots & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & \vdots & * \\ * & * & \vdots & * \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ * & * & \vdots & * \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3.9 Εφαρμόστε την απαλοιφή Gauss για να βρείτε, εάν υπάρχουν, τους n οδηγούς στους ακόλουθους πίνακες.

$$(\alpha') \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\beta') \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\gamma') \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$