

## MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

### Εργαστήριο Προβλημάτων 1

**Άσκηση 1.1** Θεωρήστε ένα κανονικό εξάγωνο  $ABCDEF$ , με κέντρο  $O$ . Εάν  $\vec{v} = \vec{OA}$  και  $\vec{w} = \vec{OB}$ , βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\vec{OC}$ ,  $\vec{OD}$ ,  $\vec{OE}$ ,  $\vec{OF}$  ως προς το σύστημα αναφοράς  $(O, \vec{v}, \vec{w})$ . Πώς διαφέρουν αυτές από τις συντεταγμένες ως προς το σύστημα  $(O, \vec{w}, \vec{v})$ ; Ως προς το σύστημα  $(O, \frac{1}{2}\vec{v}, \vec{w})$ ;

**Άσκηση 1.2** Δείξτε ότι εάν  $\vec{OA}$  και  $\vec{OB}$  είναι μη συγγραμμικά διανύσματα και  $a\vec{OA} = b\vec{OB}$ , τότε  $a = 0$  και  $b = 0$ .

**Άσκηση 1.3** Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 1.2 για να δείξετε ότι οι συντεταγμένες ενός διανύσματος  $\vec{OP}$  του επιπέδου ως προς ένα σύστημα αναφοράς  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  είναι μοναδικές: εάν  $(s, t)$  και  $(x, y)$  είναι συντεταγμένες του ίδιου διανύσματος  $\vec{OP}$ , τότε  $s = x$  και  $t = y$ .

**Άσκηση 1.4** Δίδεται (μη εκφυλισμένο) παραλληλόγραμμο  $OBCD$ , και σημεία  $E, F$  τέτοια ώστε  $\vec{OE} = a\vec{OB}$  και  $\vec{OF} = b\vec{OD}$ , με  $b \neq 1$ . Δείξτε ότι τα σημεία  $E, C$  και  $F$  είναι συγγραμμικά εάν και μόνον εάν  $a = \frac{b}{b-1}$ .

**Άσκηση 1.5** Βρείτε γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

τέτοιους ώστε

α'. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2.

β'. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη συνιστώσα να είναι 2.

γ'. Η τρίτη συνιστώσα να είναι 1.

Είναι αυτά τα αποτελέσματα μοναδικά;

**Άσκηση 1.6** Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} 2u - 3v &= 3 \\ 4u - 5v + w &= 7 \\ 2u - v - 3w &= 5 \end{aligned}$$

- α'. Κάθε εξίσωση παριστάνει ένα επίπεδο στο τριδιάστατο χώρο με σύστημα συντεταγμένων  $u, v, w$ . Βρείτε τα σημεία τομής κάθε επιπέδου με τους άξονες, και προσπαθήστε να σχεδιάσετε μέρος των τριών επιπέδων στο σχήμα σας.
- β'. Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να βρείτε τη λύση του συστήματος: αφαιρέστε ένα πολλαπλάσιο της πρώτης εξίσωσης από τη δεύτερη, έτσι ώστε να μηδενιστεί ο συντελεστής του  $u$  στη δεύτερη εξίσωση. Κάνετε το ίδιο για την τρίτη εξίσωση. Κατόπιν αφαιρέστε ένα πολλαπλάσιο της (νέας) δεύτερης εξίσωσης από την (νέα) τρίτη εξίσωση, έτσι ώστε να μηδενιστεί ο συντελεστής του  $v$  στην τρίτη εξίσωση. Βρείτε το  $w$  και εφαρμόστε ανάδρομη αντικατάσταση για να βρείτε το  $v$  και το  $u$ .