

## MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

### Εργαστήριο Προβλημάτων 2

**Άσκηση 2.1** Εφαρμόστε τη διαδικασία της απαλοιφής για να εξετάσετε εάν έχουν μοναδική, καμία ή άπειρες λύσεις τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων.

$$\begin{array}{rcl} 2u - 3v & = & 3 \\ 4u - 6v + w & = & 7 \\ 2u - v - 3w & = & 5 \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} 2u - 3v & = & 3 \\ 4u - 6v + w & = & 7 \\ 2u - 3v - 3w & = & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2u - 3v & = & 3 \\ 4u - 5v + 2w & = & 7 \\ 2u - v + 4w & = & 5 \end{array}$$

**Άσκηση 2.2** Εάν τα στοιχεία του πίνακα  $A$  είναι  $a_{ij}$ , χρησιμοποιήστε το συμβολισμό των δεικτών για να γράψετε

α'. τον πρώτο οδηγό

β'. τον πολλαπλασιαστή  $\lambda_{i1}$  της πρώτης γραμμής όταν την αφαιρούμε από την γραμμή  $i$

γ'. Το νέο στοιχείο που αντικαθιστά το  $a_{ij}$  μετά αυτή την αφαίρεση.

δ'. τον δεύτερο οδηγό.

**Άσκηση 2.3** Υπολογίστε τα δύο γινόμενα πινάκων με μία γραμμή ή μία στήλη:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Άσκηση 2.4** Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ \pi/2 \\ \sqrt{2}/3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 \cos(\pi/6) & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

**Άσκηση 2.5** Γράψτε τους 3 επί 3 πίνακες  $A$  και  $B$  με στοιχεία

$$a_{ij} = i - j \quad \text{και} \quad b_{ij} = \frac{1}{j}.$$

και υπολογίστε τα γινόμενα  $AB$ ,  $BA$  και  $A^2$ .

**Άσκηση 2.6** Θεωρήστε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

- α'. Εκφράστε τη δεύτερη στήλη του γινομένου  $AB$  ως γραμμικό συνδυασμό των στηλών του  $A$ .
- β'. Εκφράστε τη δεύτερη γραμμή του γινομένου  $AB$  ως γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του  $B$ .

**Άσκηση 2.7** Αληθές ή ψευδές; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

- α'. Εάν η πρώτη και η τρίτη στήλη του πίνακα  $A$  είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και την τρίτη στήλη του πίνακα  $AB$ .
- β'. Εάν η πρώτη και η τρίτη στήλη του πίνακα  $B$  είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και την τρίτη στήλη του πίνακα  $AB$ .
- γ'. Εάν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του πίνακα  $A$  είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και την τρίτη γραμμή του πίνακα  $AB$ .
- δ'. Εάν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του πίνακα  $B$  είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και την τρίτη γραμμή του πίνακα  $AB$ .

**Άσκηση 2.8** Βρείτε τις τιμές των  $a$  και  $b$  για τις οποίες το παρακάτω σύστημα

- α'. δεν έχει λύση
- β'. έχει άπειρες λύσεις
- γ'. έχει μόνον μια λύση.

Υπολογίστε τη λύση στην περίπτωση γ'.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{bmatrix}$$