Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα

Σημειώσεις μαθήματος ΜΕΜ112

Χρήστος Κουρουνιώτης

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ και
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

2019

Περιεχόμενα

1 Γεωμετρικά και αριθμητικά διανύσματα **2**

1.1 Γεωμετρικά διανύσματα 2

1.2 Πρόσθεση 3

1.3 Πολλαπλασιασμός με αριθμό 4

1.4 Γραμμικοί συνδυασμοί 5

1.5 Συντεταγμένες 6

1.6 Αριθμητικά διανύσματα 8

1.7 Ευθείες και επίπεδα στο E^k 10

1.8 Ασκήσεις 12

2 Γραμμικές Εξισώσεις και Πίνακες **13**

2.1 Τομή ευθειών και επιπέδων 13

2.2 Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ 17

2.3 Επίλυση συστήματος τριών εξισώσεων με απαλοιφή Gauss 18

2.4 Ο αλγόριθμος της απαλοιφής 21

2.5 Πίνακες 23

2.6 Το κόστος του πολλαπλασιασμού 29

2.7 Αντίστροφοι πίνακες 33

2.8 Ανάστροφοι πίνακες 37

3 Η απαλοιφή Gauss **40**

3.1 Έκφραση της απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων 40

3.2 Παραγοντοποίηση LU 41

3.3 Εναλλαγές γραμμών 46

3.4 Η διαδικασία Gauss - Jordan για την εύρεση του αντιστρόφου 49

4 Πίνακες και Διανυσματικοί Υπόχωροι του $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ **54**

4.1 Διανυσματικοί και αφινικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ 54

4.2 Χώρος στηλών και μηδενόχωρος 57

4.3 Απαλοιφή σε σύστημα $\mathbf{m}$ εξισώσεων με $\mathbf{n}$ αγνώστους 60

4.4 Οι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης 65

5 Διανυσματικοί Χώροι και Υπόχωροι **74**
5.1 Αξιώματα Διανυσματικού Χώρου 74
5.2 Πρώτα αποτελέσματα από τα αξιώματα. 76
5.3 Παραδείγματα διανυσματικών χώρων πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς. . 78
5.4 Διανυσματικοί υπόχωροι 81
5.5 Γραμμικοί Συνδυασμοί 83

6 Γραμμική ανεξαρτησία, βάσεις, διάσταση **93**
6.1 Γραμμική εξάρτηση 93
6.2 Γραμμική ανεξαρτησία 97
6.3 Διάσταση 106
6.4 Οι τέσσερεις Θεμελιώδεις Υπόχωροι ενός πίνακα. 109
6.5 Διάσταση υπόχωρου και αθροίσματος 116
6.6 Ύπαρξη βάσης 118

7 Γραμμικές Απεικονίσεις **121**
7.1 Γραμμικές απεικονίσεις 121
7.2 Γραμμικές απεικονίσεις του επιπέδου 130
7.3 Ισομορφισμοί 133
7.4 Συντεταγμένες ως προς βάση 134

8 Γραμμικές Απεικονίσεις, Βάσεις, Πίνακες **142**
8.1 Γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες 142
8.2 Σύνθεση απεικονίσεων 147
8.3 Αλλαγή βάσης 148

Εισαγωγή

Κεφάλαιο 1

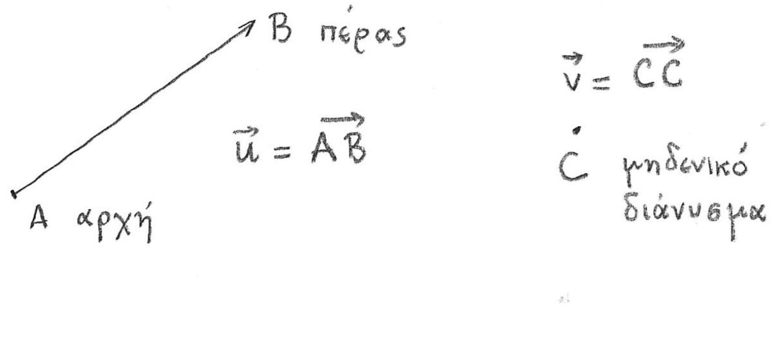
Γεωμετρικά και αριθμητικά διανύσματα

1.1 Γεωμετρικά διανύσματα

Θα συμβολίσουμε E^2 το επίπεδο και E^3 το χώρο τριών διαστάσεων. Θα θεωρήσουμε γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο ή στο χώρο, E^k, για $k = 2$ ή 3.

Ορισμός 1.1. Ένα **γεωμετρικό διάνυσμα** στο E^k είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα στο E^k, πάνω στο οποίο διακρίνουμε τα δύο άκρα, και ονομάζουμε το ένα **αρχή** και το άλλο **πέρας**. Όταν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος είναι το ίδιο σημείο λέμε οτι το διάνυσμα είναι **μηδενικό**.

Θα συμβολίζουμε τα γεωμετρικά διανύσματα είτε με ένα μικρό γράμμα του λατινικού αλφαβήτου επιγραμμισμένο με βέλος, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ... είτε με το ζεύγος των σημείων του E^k, με πρώτο την αρχή και δεύτερο το πέρας, $\overrightarrow{AB}$.



Σχήμα 1.1: Διανύσματα.

Δραστηριότητα 1.1 Σημειώστε τέσσερα τυχαία σημεία A, B, C, D στο επίπεδο (λέγοντας 'τυχαία' εδώ εννοούμε οτι είναι όλα διαφορετικά, και τα διανύσματα που σχηματίζονται με αρχή σε ένα από τα 4 σημεία και πέρας σε ένα άλλο από αυτά δεν είναι παράλληλα και έχουν όλα διαφορετικά μέτρα). Καταγράψτε όλα (τα 16) διαφορετικά διανύσματα με άκρα στα σημεία A, B, C, D.

Το σημείο του επιπέδου στο οποίο βρίσκεται η αρχή το ονομάζουμε **σημείο εφαρμογής** του γεωμετρικού διανύσματος. Περισσότερες ιδιότητες των γεωμετρικών διανυσμάτων θα μελετήσετε στο μάθημα Αναλυτικής Γεωμετρίας, σημειώσεις ''Επίπεδο και Χώρος''. Εδώ μας ενδιαφέρει μία ειδική κατηγορία διανυσμάτων, που θα μας δώσουν το πρώτο παράδειγμα αυτού που θα ονομάσουμε *διανυσματικό χώρο*.

Επιλέγουμε ένα σημείο O στο E^k, και θεωρούμε το σύνολο όλων των γεωμετρικών διανυσμάτων στο E^k με σημείο εφαρμογής στο O. Αυτό το σύνολο το συμβολίζουμε $T_O E^k$,

$$T_O E^k = \{\overrightarrow{OA} : A \text{ σημείο του } E^k\}.$$

Σε αυτό το σύνολο θα ορίσουμε δύο πράξεις: την πρόσθεση διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό.

1.2 Πρόσθεση

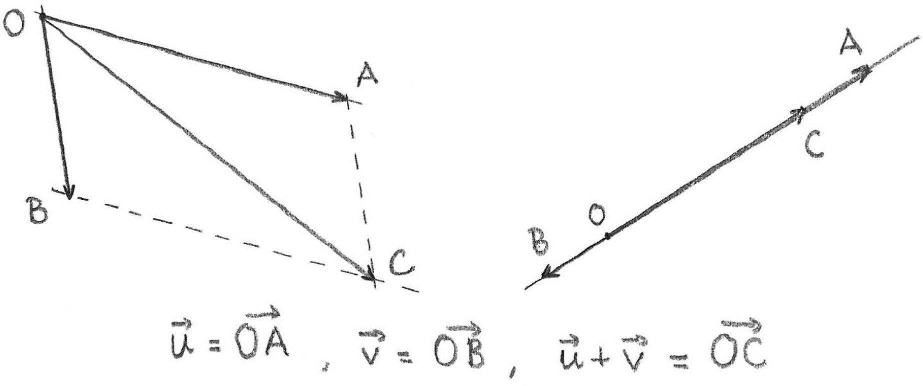
Για να προσθέσουμε δύο γεωμετρικά διανύσματα με σημείο εφαρμογής O, τα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$, χρησιμοποιούμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $OACB$, με πλευρές OA και OB. Τότε C είναι ένα σημείο στο επίπεδο που προσδιορίζεται από τα σημεία O, A και B. Το **άθροισμα** των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{OC}$,

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

Παρατηρούμε οτι το σημείο C βρίσκεται στο επίπεδο από το O στο οποίο βρίσκονται τα A και B. Εάν A και B βρίσκονται στην ίδια ευθεία από το O, τότε C βρίσκεται επίσης σε αυτή την ευθεία.

Δραστηριότητα 1.2 Σημειώστε τρία σημεία στο επίπεδο, A, B, C που να μην βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Πόσα διαφορετικά παραλληλόγραμμα μπορείτε να σχεδιάσετε που να έχουν τα σημεία A, B, C ως τρεις από τις κορυφές τους (όχι υποχρεωτικά με αυτή τη σειρά); Προσπαθήστε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό.

Δραστηριότητα 1.3 Σχεδιάστε τρία σημεία A, B, C που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και θεωρήστε D, D', ... τις κορυφές των παραλληλογράμμων που βρήκατε στη Δραστηριότητα 1.2. Για κάθε ένα από αυτά τα παραλληλόγραμμα γράψτε το άθροισμα των δύο διανυσμάτων που αντιστοιχούν στις πλευρές του παραλληλογράμμου που έχουν κοινή αρχή στο σημείο A. Για παράδειγμα, εάν $ABCD$ είναι ένα από τα παραλληλόγραμμα, το αντίστοιχο άθροισμα είναι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



Σχήμα 1.2: Άθροισμα διανυσμάτων.

1.3 Πολλαπλασιασμός με αριθμό

Για να πολλαπλασιάσουμε ένα γεωμετρικό διάνυσμα με σημείο εφαρμογής στο O, $\overrightarrow{OB}$, με έναν πραγματικό αριθμό a, βρίσκουμε το σημείο D πάνω στην ευθεία OB για το οποίο ο λόγος των μηκών $\frac{|OD|}{|OB|} = |a|$, και D βρίσκεται στην ίδια πλευρά του O με το B εάν $a \geq 0$, ενώ βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά εάν $a < 0$. Σημειώνουμε οτι τα σημεία B και D βρίσκονται στην ίδια ευθεία από το O.

Δραστηριότητα 1.4 Σημειώστε τρία σημεία A, B, C που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και σχεδιάστε τα διανύσματα

$$
\begin{array}{llllll}
\alpha') & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, & \beta') & 2\,\overrightarrow{AB}, & \gamma') & (-1)\overrightarrow{AB}), \\
\delta') & \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}, & \varepsilon') & 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, & \text{ϛ}') & \overrightarrow{AC} + (-1)\,\overrightarrow{AB}\,.
\end{array}
$$

Στο "Επίπεδο και Χώρος" αποδεικνύουμε οτι οι πράξεις της πρόσθεσης γεωμετρικών διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού γεωμετρικού διανύσματος με πραγματικό αριθμό έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες.

Πρόταση 1.1 *Θεωρούμε τα γεωμετρικά διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ με σημείο εφαρμογής το O, και τους αριθμούς a, $b \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

α'. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, *(αντιμεταθετική)*

β'. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, *(προσεταιριστική)*

γ'. $\vec{u} + \overrightarrow{OO} = \vec{u}$

δ'. $1\,\vec{u} = \vec{u}$ *και* $0\,\vec{u} = \overrightarrow{OO}$

ε'. $(ab)\,\vec{u} = a\,(b\,\vec{u})$

ϛ'. $(a + b)\,\vec{u} = a\,\vec{u} + b\,\vec{u}$

ζ'. $a\,(\vec{u} + \vec{v}) = a\,\vec{u} + a\,\vec{v}$

Το διάνυσμα $(-1)\vec{u}$ ικανοποιεί τη σχέση $\vec{u} + (-1)\vec{u} = \overrightarrow{OO}$. Ονομάζεται **αντίθετο** του $\vec{u}$, και συμβολίζεται $-\vec{u}$. Χρησιμοποιούμε επίσης το συμβολισμό της αφαίρεσης, $\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$.

Δραστηριότητα 1.5 Σημειώστε τρία σημεία A, B, C που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και σχεδιάστε τα διανύσματα

$$\text{α}')\quad \overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}, \qquad \text{β}')\quad \overrightarrow{AC} + (2\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}), \qquad \text{γ}')\quad 3\,\overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{AB}\,.$$

1.4 Γραμμικοί συνδυασμοί

Ορισμός 1.2. Εάν $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_n$ είναι διανύσματα, με σημείο εφαρμογής στο O, ονομάζουμε **γραμμικό συνδυασμό** των $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_n$ κάθε έκφραση της μορφής

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_n\vec{u}_n$$

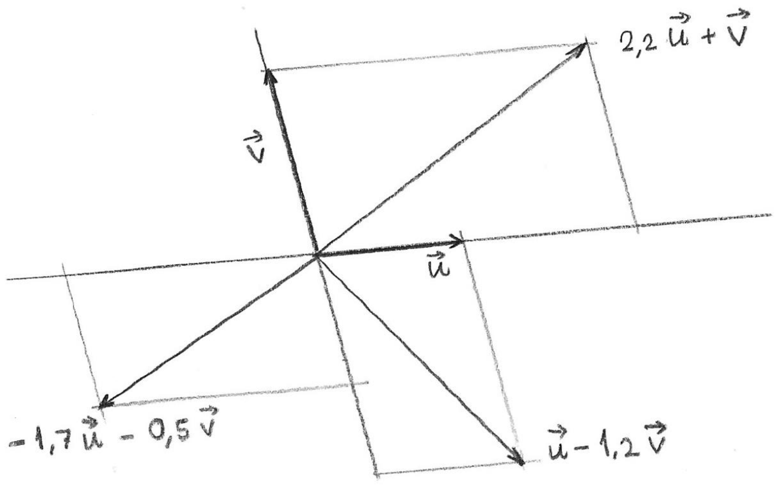
όπου a_1, a_2, …, a_n είναι πραγματικοί αριθμοί.

Στις επόμενες προτάσεις θα δούμε πότε μπορούμε να εκφράσουμε ένα διάνυσμα στο $T_O E^k$ ως γραμμικό συνδυασμό ενός συνόλου διανυσμάτων.

Πρόταση 1.2 *Εάν τα σημεία B και C βρίσκονται στην ίδια ευθεία από το O, και $\overrightarrow{OB}$ δεν είναι μηδενικό διάνυσμα (δηλαδή εάν $B \neq O$), τότε υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε*

$$\overrightarrow{OC} = a\,\overrightarrow{OB}\,.$$

Δραστηριότητα 1.6 Γιατί χρειάζεται ο περιορισμός $B \neq O$; Ποιά είναι τα διανύσματα $a\,\overrightarrow{OB}$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, όταν $B = O$;



Σχήμα 1.3: Γραμμικοί συνδυασμοί διανυσμάτων.

Πρόταση 1.3 *Εάν τα σημεία O, A και B δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και το σημείο C βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο από το O με τα A και B, τότε υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί a, $b \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε*

$$\overrightarrow{OC} = a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB}\,.$$

Πρόταση 1.4 *Εάν τα σημεία O, A, B και C δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο στο E^3 και D είναι οποιοδήποτε σημείο του E^3, τότε υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί a, b, $c \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε*

$$\overrightarrow{OD} = a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC}\,.$$

Από τις παραπάνω προτάσεις βλέπουμε οτι

- Εάν τα γεωμετρικά διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο στο E^3, τότε κάθε διάνυσμα στο $T_O E^3$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$.

- Εάν τα γεωμετρικά διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία στο E^2, τότε κάθε διάνυσμα στο $T_O E^2$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v}$ και $\vec{w}$.

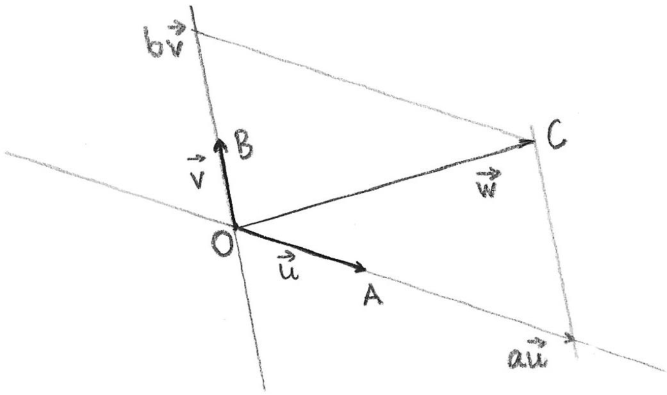
1.5 Συντεταγμένες

Επιλέγουμε δύο διανύσματα $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$ στο $T_O E^2$, τέτοια ώστε O, A και B δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Εάν $\vec{z}$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα του $T_O E^2$, υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί a και b τέτοιοι ώστε $\vec{z} = a\vec{v} + b\vec{w}$. Αντίστροφα, το ζεύγος πραγματικών αριθμών a και b ορίζει ένα μοναδικό διάνυσμα $\vec{z} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των γεωμετρικών διανυσμάτων του επιπέδου με σημείο εφαρμογής στο O, $T_O E^2$ και του συνόλου διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}^2$,

$$T_O E^2 \longleftrightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{z} \longleftrightarrow (a,\, b)\,.$$

Λέμε οτι $(O,\, \vec{v},\, \vec{w})$ είναι ένα **σύστημα αναφοράς** στο επίπεδο E^2, και $(a,\, b)$ είναι οι **συντεταγμένες** του διανύσματος $\vec{z}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{v},\, \vec{w})$.



Σχήμα 1.4: Συντεταγμένες διανυσματος ως προς σύστημα αναφοράς.

> **Δραστηριότητα 1.7** Σημειώστε τα σημεία A, B, C, D, E, F στις κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου, και το O στο κέντρο του εξαγώνου. Εκφράστε τα $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.

Επιλέγουμε τρία διανύσματα $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$ και $\vec{u} = \overrightarrow{OC}$ στο $T_O E^3$, τέτοια ώστε O, A, B και C δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Εάν $\vec{z}$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα του $T_O E^3$, υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί a, b και c τέτοιοι ώστε $\vec{z} = a\vec{v}+b\vec{w}+c\vec{u}$. Αντίστροφα, η τριάδα πραγματικών αριθμών a, b και c ορίζει ένα μοναδικό διάνυσμα $\vec{z} = a\vec{v} + b\vec{w} + c\vec{u}$.

Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των γεωμετρικών διανυσμάτων του χώρου με σημείο εφαρμογής στο O, $T_O E^3$ και του συνόλου διατεταγμένων τριάδων πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}^3$,

$$T_O E^3 \longleftrightarrow \mathbb{R}^3 : \vec{z} \longleftrightarrow (a,\, b,\, c)\,.$$

Λέμε οτι $(O,\, \vec{v},\, \vec{w},\, \vec{u})$ είναι ένα **σύστημα αναφοράς** στο χώρο E^3, και $(a,\, b,\, c)$ είναι οι **συντεταγμένες** του διανύσματος $\vec{z}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{v},\, \vec{w},\, \vec{u})$.

Στο επίπεδο E^2 με σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{v},\, \vec{w})$ θεωρούμε τα γεωμετρικά διανύσματα $\overrightarrow{OA} = a\vec{v} + b\vec{w}$ και $\overrightarrow{OP} = s\vec{v} + t\vec{w}$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της Πρότασης 1.1 υπολογίζουμε τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}$:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} \;\; = \;\; (a\vec{v} + b\vec{w}) + (s\vec{v} + t\vec{w})$$

$$\begin{aligned}
(\text{προσεταιριστική}) &= ((a\vec{v}+b\vec{w})+s\vec{v})+t\vec{w}\\
(\text{προσεταιριστική}) &= (a\vec{v}+(b\vec{w}+s\vec{v}))+t\vec{w}\\
(\text{αντιμεταθετική}) &= (a\vec{v}+(s\vec{v}+b\vec{w}))+t\vec{w}\\
(\text{προσεταιριστική}) &= ((a\vec{v}+s\vec{v})+b\vec{w}))+t\vec{w}\\
(\text{προσεταιριστική}) &= (a\vec{v}+s\vec{v})+(b\vec{w}+t\vec{w})\\
(\text{επιμεριστική}) &= (a+s)\vec{v}+(b+t)\vec{w}\,.
\end{aligned}$$

Άρα οι συντεταγμένες του αθροίσματος $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}$ είναι $(a+s,\, b+t)$.

Οι συντεταγμένες του πολλαπλασίου $r\,\overrightarrow{OA}$ είναι $(ra,\, rb)$:

$$r\,\overrightarrow{OA} = (ra)\vec{v}+(rb)\vec{w}\,.$$

Παρόμοια αποδεικνύουμε τις ανάλογες σχέσεις στο E^3. Εάν $(a,\, b,\, c)$ και $(s,\, t,\, q)$ είναι οι συντεταγμένες των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB} \in T_OE^3$, τοτε οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ είναι $(a+s,\, b+t,\, c+q)$. Εάν $(a,\, b,\, c)$ είναι οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{OA} \in T_OE^3$, τοτε οι συντεταγμένες του $r\,\overrightarrow{OA}$ είναι $(ra,\, rb,\, rc)$.

Πρόταση 1.5 *Η αντιστοιχία $E^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ μεταξύ διανυσμάτων στο επίπεδο ή στο χώρο και διατεταγμένων ζευγών ή διατεταγμένων τριάδων, έχει τις ιδιότητες:*

α΄. Οι συντεταγμένες του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι ίσες με το άθροισμα των αντίστοιχων συντεταγμένων κάθε διανύσματος.

β΄. Οι συντεταγμένες του πολλαπλασίου ενός διανύσματος με έναν αριθμό είναι ίσες με το γινόμενο των αντίστοιχων συντεταγμένων του διανύσματος, με τον ίδιο αριθμό.

Η αντιστοιχία των διανυσμάτων του T_OE^k με το σύνολο $\mathbb{R}^k$ μεταφέρει τις πράξεις των γεωμετρικών διανυσμάτων σε αντίστοιχες πράξεις μεταξύ των διατεταγμένων ζευγών ή διατεταγμένων τριάδων. Αυτές τις πράξεις θα μελετήσουμε στην επόμενη παράγραφο.

1.6 Αριθμητικά διανύσματα

Αριθμητικά διανύσματα θα ονομάζουμε τα διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών, $(v_1,\, v_2) \in \mathbb{R}^2$, ή τις διατεταγμένες τριάδες $(v_1,\, v_2,\, v_3) \in \mathbb{R}^3$, όταν τα θεωρούμε ως στοιχεία ενός συνόλου με πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού με αριθμό. Τα αριθμητικά διανύσματα είναι το δεύτερο παράδειγμα αυτού που θα ονομάσουμε διανυσματικό χώρο. Οι αριθμοί v_i είναι οι **συνιστώσες** του αριθμητικού διανύσματος.

Τα αριθμητικά διανύσματα θα τα θεωρούμε ως στήλες,

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3\,.$$

αν και μερικές φορές, για λόγους τυπογραφικής οικονομίας, μπορεί να τα γράφουμε οριζόντια, $(v_1,\, v_2)$, ή $(v_1,\, v_2,\, v_3)$. Η σημασία αυτής της επιλογής θα φανεί όταν ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Για να προσθέσουμε δύο αριθμητικά διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$, προσθέτουμε τις αντίστοιχες συνιστώσες του διατεταγμένου ζεύγους:

$$v + w = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix}.$$

Παρόμοια, για να προσθέσουμε δύο αριθμητικά διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$, προσθέτουμε τις αντίστοιχες συνιστώσες της διατεταγμένης τριάδας:

$$v + w = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{bmatrix}.$$

Για να πολλαπλασιάσουμε ένα αριθμητικό διάνυσμα με έναν πραγματικό αριθμό, πολλαπλασιάζουμε κάθε συνιστώσα του διανύσματος με τον αριθμό. Για $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $w = (w_1,\, w_2,\, w_3) \in \mathbb{R}^3$ και $a \in \mathbb{R}$,

$$av = a \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} av_1 \\ av_2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad aw = a \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw_1 \\ aw_2 \\ aw_3 \end{bmatrix}.$$

Ελέγχουμε οτι η πρόσθεση αριθμητικών διανυσμάτων και ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες.

Πρόταση 1.6 *Θεωρούμε τα αριθμητικά διανύσματα $v,\, w,\, u \in \mathbb{R}^k$, $k = 2,\, 3$, το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$, δηλαδή $\mathbf{0} = (0,\, 0) \in \mathbb{R}^2$ ή $\mathbf{0} = (0,\, 0,\, 0) \in \mathbb{R}^3$, και πραγματικούς αριθμούς $a,\, b \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.*

α΄. $v + w = w + v$

β΄. $(v + w) + u = v + (w + u)$

γ΄. $v + \mathbf{0} = v$

δ΄. $1v = v$ *και* $0v = \mathbf{0}$

ε΄. $(ab)\, v = a\, (bv)$

ϛ΄. $(a + b)\, v = av + bv$

ζ΄. $a\, (v + w) = av + aw$.

Παρατηρήστε οτι στην έκφραση $0v = \mathbf{0}$ το 0 στα αριστερά είναι ο αριθμός μηδέν, ενώ το $\mathbf{0}$ στα δεξιά είναι το μηδενικό αριθμητικό διάνυσμα.

Εάν $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι αριθμητικά διανύσματα, ονομάζουμε **γραμμικό συνδυασμό** των διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$ κάθε έκφραση της μορφής $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Στην περίπτωση των αριθμητικών διανυσμάτων υπάρχει μία προφανής επιλογή συστήματος αναφοράς, έτσι ώστε κάθε αριθμητικό διάνυσμα να εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του συστήματος.

Πρόταση 1.7 *Θεωρούμε τα αριθμητικά διανύσματα*

$$e_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

στο $\mathbb{R}^2$. *Κάθε διάνυσμα* $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός*

$$v = v_1e_{21} + v_2e_{22}\,,$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 1.8 *Θεωρούμε τα αριθμητικά διανύσματα*

$$e_{31} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_{32} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_{33} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

στο $\mathbb{R}^3$. *Κάθε διάνυσμα* $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός*

$$v = v_1e_{31} + v_2e_{32} + v_3e_{33}\,,$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1.7 Ευθείες και επίπεδα στο E^k

Έχουμε δει οτι ένα σημείο P βρίσκεται στην ευθεία που ορίζεται από τα σημεία O και A εάν και μόνον εάν $\overrightarrow{OP}$ είναι πολλαπλάσιο του $\overrightarrow{OA}$. Τι συμβαίνει με άλλες ευθείες στο E^k;

Θεωρούμε την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία A και B. Θεωρούμε επίσης το σημείο C

τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Τότε $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$, δηλαδή $OABC$ είναι παραλληλόγραμμο, και η ευθεία AB είναι παράλληλη προς την OC. Εάν P είναι οποιοδήποτε σημείο της AB, υπάρχει σημείο Q τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$. Αυτό σημαίνει οτι η ευθεία OQ είναι παράλληλη προς την AB, άρα το διάνυσμα $\overrightarrow{OQ}$ είναι πολλαπλάσιο του $\overrightarrow{OC}$.

Πρόταση 1.9 *Θεωρούμε δύο σημεία A και B στο E^k, και το διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Ένα σημείο P βρίσκεται στην ευθεία AB εάν και μόνον εάν υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε*

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\,\vec{v}\,. \tag{1.1}$$

Εάν βρισκόμαστε στο επίπεδο E^2 και έχουμε επιλέξει σύστημα αναφοράς $(O, \vec{v}, \vec{w})$, η σχέση 1.1 εκφράζεται ως προς τις συντεταγμένες του σημείου $P : (x, y)$ και των σημείων $A : (x_1, y_1)$ και $B : (x_2, y_2)$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Ανάλογα, εάν βρισκόμαστε στο χώρο E^3 με σύστημα αναφοράς $(O, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$, η σχέση 1.1 εκφράζεται ως προς τις συντεταγμένες των σημείων $P : (x, y, z)$, $A : (x_1, y_1, z_1)$ και $B : (x_2, y_2, z_2)$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Στο ''Επίπεδο και Χώρος'' δείχνουμε πώς, απαλείφοντας την παράμετρο t από τις σχέσεις 1.2 βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας στο επίπεδο,

$$Ax + By = C\,,$$

ενώ απαλείφοντας την παράμετρο t από τις σχέσεις 1.3 βρίσκουμε τις δύο εξισώσεις που προσδιορίζουν μία ευθεία στο χώρο,

$$\begin{array}{ccccccc} A_1x & + & B_1y & + & C_1z & = & D_1\,, \\ A_2x & + & B_2y & + & C_2z & = & D_2\,. \end{array}$$

Τώρα θεωρούμε το επίπεδο στο E^3 που ορίζεται από τρία σημεία A, B, C. Θεωρούμε τα σημεία D και E για τα οποία $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$. Όπως προηγουμένως, η ευθεία ευθεία OD είναι παράλληλη στην AB, η ευθεία OE είναι παράλληλη στην AC. Συνεπώς το επίπεδο ODE είναι παράλληλο προς το επίπεδο ABC . Όπως προηγουμένως, η ευθεία OD είναι παράλληλη στην AB, η OE παράλληλη στην AC, και συνεπώς το επίπεδο ODE είναι παράλληλο στο ABC.

Θεωρούμε τώρα σημείο P στο E^3, και σημείο Q τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$, και συνεπώς η ευθεία OQ είναι παράλληλη στην AP. Συνεπώς το σημείο P βρίσκεται στο επίπεδο ABC εάν και μόνον εάν το σημείο Q βρίσκεται στο επίπεδο ODE. δηλαδή εάν $\overrightarrow{OQ}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{OD}$ και $\overrightarrow{OE}$.

Πρόταση 1.10 *Θεωρούμε τρία σημεία A, B και C στο E^3, και τα διανύσματα $\vec{v} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$. Ένα σημείο P βρίσκεται στο επίπεδο ABC εάν και μόνον εάν υπάρχουν αριθμοί s και $t \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε*

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\,\vec{v} + t\,\vec{w}\,. \tag{1.4}$$

Εάν έχουμε επιλέξει σύστημα αναφοράς $(O, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$, η σχέση 1.4 εκφράζεται ως προς τις συντεταγμένες των σημείων $P : (x, y, z)$, $A : (x_1, y_1, z_1)$, $B : (x_2, y_2, z_2)$ και $C : (x_3, y_3, z_3)$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Στο "Επίπεδο και Χώρος" δείχνουμε πώς, απαλείφοντας τις παραμέτρους s και t από τη σχέση 1.5 βρίσκουμε την εξίσωση ενός επιπέδου στο χώρο,

$$Ax + By + Cz = D\,.$$

1.8 Ασκήσεις

Άσκηση 1.1 Δείξτε οτι εάν $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι μη συγγραμμικά διανύσματα και $a\,\overrightarrow{OA} = b\,\overrightarrow{OB}$, τότε $a = 0$ και $b = 0$.

Άσκηση 1.2 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 1.1 για να δείξετε οτι οι συντεταγμένες ενός διανύσματος $\overrightarrow{OP}$ του επιπέδου ως προς ένα σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$ είναι μοναδικές: εάν (s, t) και (x, y) είναι συντεταγμένες του ίδιου διανύσματος $\overrightarrow{OP}$, τότε $s = x$ και $t = y$.

Άσκηση 1.3 Δίδεται (μη εκφυλισμένο) παραλληλόγραμμο $OBCD$, και σημεία E, F τέτοια ώστε $\overrightarrow{OE} = a\,\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{OF} = b\,\overrightarrow{OD}$, με $b \neq 1$. Δείξτε οτι τα σημεία E, C και F είναι συγγραμμικά εάν και μόνον εάν $a = \dfrac{b}{b-1}$.

Κεφάλαιο 2

Γραμμικές Εξισώσεις και Πίνακες

2.1 Τομή ευθειών και επιπέδων

Θα εξετάσουμε το σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 5 \end{array} \tag{2.1}$$

από δύο διαφορετικές απόψεις.

Πρώτα θεωρούμε κάθε γραμμή (εξίσωση) χωριστά. Η πρώτη γραμμή

$$2x \ - \ y \ = \ 1$$

παριστάνει μια ευθεία στο επίπεδο: την ευθεία που περνάει από τα σημεία με συντεταγμένες $(\frac{1}{2}, 0)$ και $(0, -1)$. Η δεύτερη γραμμή

$$x \ + \ y \ = \ 5$$

παριστάνει την ευθεία που περνάει από τα σημεία με συντεταγμένες $(5, 0)$ και $(0, 5)$. Εάν οι δύο ευθείες τέμνονται, όπως στο παράδειγμα, το σύστημα εξισώσεων έχει μοναδική λύση, τις συντεταγμένες (x, y) του σημείου στο οποίο τέμνονται οι δύο ευθείες. Για να βρούμε τις λύσεις του συστήματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μία εξίσωση για να αντικαταστήσουμε έναν από τους αγνώστους στην άλλη. Στο παράδειγμα 2.1, από την πρώτη εξίσωση έχουμε $y = 2x - 1$. Αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση έχουμε $x + (2x - 1) = 5$, απ' όπου βρίσκουμε $x = 2$, και συνεπώς $y = 3$. Συμπεραίνουμε οτι το σημείο τομής έχει συντεταγμένες $(2, 3)$.

Τι άλλο μπορεί να συμβεί; Δύο διαφορετικές ευθείες σε ένα επίπεδο, είτε τέμνονται είτε είναι παράλληλες. Στο επόμενο παράδειγμα το σύστημα εξισώσεων παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες,

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 1 \\ -4x & + & 2y & = & 0\,. \end{array} \tag{2.2}$$

Αφού οι ευθείες δεν έχουν κοινό σημείο, το σύστημα δεν έχει καμία λύση. Η αντικατάσταση $y = 2x - 1$ στη δεύτερη εξίσωση δίδει $-4x + 4x - 2 = 0$ που είναι αδύνατο.

Εάν οι δύο εξισώσεις παριστάνουν την ίδια ευθεία, όπως στο παράδειγμα

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ -4x & + & 2y & = & -2 \end{array} \tag{2.3}$$

το σύστημα έχει πολλές λύσεις. Η αντικατάσταση $y = 2x - 1$ στη δεύτερη εξίσωση δίδει $-4x + 4x - 2 = -2$ που ισχύει για κάθε τιμή του x. Οι συντεταγμένες $(x, 2x-1)$ όλων των σημείων της ευθείας αποτελούν λύσεις του συστήματος.

Μία διαφορετική προσέγγιση είναι να επικεντρώσουμε την προσοχή μας στις κατακόρυφες στήλες και να θεωρήσουμε το σύστημα εξισώσεων ως μία εξίσωση αριθμητικών διανυσμάτων:

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Σε αυτή την προσέγγιση αναζητούμε ένα γραμμικό συνδυασμό των αριθμητικών διανυσμάτων στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης, με κατάλληλους συντελεστές x και y, που να δίνει το διάνυσμα στη δεξιά πλευρά. Γεωμετρικά αυτό αντιστοιχεί στο να χρησιμοποιήσουμε αντίστροφα τον κανόνα του παραλληλογράμμου, για να βρούμε τους συντελεστές με τους οποίους πρέπει να πολλαπλασιάσουμε δύο διανύσματα ώστε να βρούμε το διάνυσμα στα δεξιά. Εάν τα δύο διανύσματα δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία από το O, μπορούμε να κατασκευάσουμε το παραλληλόγραμμο. Συνεπώς, εάν τα αριθμητικά διανύσματα στα αριστερά δεν είναι πολλαπλάσιο το ένα του άλλου, το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Τί άλλο μπορεί να συμβεί; Εάν τα διανύσματα στήλες είναι συγγραμμικά, τότε δεν σχηματίζουν παραλληλόγραμμο. Εάν το διάνυσμα στη δεξιά πλευρά είναι επίσης συγγραμμικό, τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις. Εάν το διάνυσμα στα δεξιά δεν είναι συγγραμμικό με τα άλλα δύο, τότε δεν υπάρχει καμία λύση.

Δραστηριότητα 2.1 Γράψτε σε διανυσματική μορφή τις εξισώσεις 2.2 και 2.3.

Όταν έχουμε τρεις εξισώσεις με τρεις αγνώστους παρουσιάζονται περισσότερες δυνατότητες. Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ 4u & - & 6v & & & = & -2 \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 \end{array} \tag{2.4}$$

Εξετάζουμε πρώτα κάθε γραμμή (εξίσωση). Η πρώτη γραμμή παριστάνει ένα επίπεδο στο χώρο E^3: το επίπεδο που περνάει από τα σημεία με συντεταγμένες $(\frac{5}{2}, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(0, 0, 5)$. Η δεύτερη γραμμή παριστάνει το επίπεδο που περνάει από τα σημεία με συντεταγμένες $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ και $(0, \frac{1}{3}, 0)$. Οταν βάλουμε $u = 0$ και $v = 0$ τότε παίρνουμε $0w = -2$, που δεν έχει λύση. Συνεπώς το επίπεδο που αντιστοιχεί στη δεύτερη γραμμή δεν έχει κοινό σημείο με την ευθεία που αποτελείται από τα σημεία με συντεταγμένες $(0, 0, r)$. Πάντως τα δύο επίπεδα τέμνονται σε μια ευθεία. Η τρίτη γραμμή παριστάνει πάλι ένα επίπεδο, που τέμνει αυτήν την ευθεία σε ένα σημείο. Οι συντεταγμένες αυτού του σημείου δίδουν τη λύση του συστήματος. Μπορούμε πάλι να χρησιμοποιήσουμε διαδοχικές αντικαταστάσεις για να βρούμε τη λύση. Στο παράδειγμα, από την πρώτη εξίσωση έχουμε $w = 5 - 2u - v$ και από τη δεύτερη $v = \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}$. Αντικαθιστώντας το w στην τρίτη εξίσωση, έχουμε $-6u + 5v = -1$. Αντικαθιστώντας τέλος το v σε αυτή την εξίσωση βρίσκουμε $u = 1$, και συνεπώς $v = 1$ και $w = 2$. Άρα οι συντεταγμένες του σημείου στο οποίο τέμνονται τα τρία επίπεδα είναι $(1, 1, 2)$.

Τι άλλο μπορεί να συμβεί; Να μην τέμνονται τα τρία επίπεδα σε ένα μοναδικό σημείο. Στις τρεις διαστάσεις αυτό μπορεί να συμβεί με περισσότερους τρόπους:

- τα τρία επιπεδα να είναι παράλληλα,
- δύο επίπεδα να είναι παράλληλα και να τα τέμνει το τρίτο, σε δύο παράλληλες ευθείες,
- τα τρία επίπεδα να τέμνονται ανα δύο, σε τρεις παράλληλες ευθείες.
- τα τρία επίπεδα να τέμνονται σε μια κοινή ευθεία,
- δύο από τα επίπεδα να συμπίπτουν, και το τρίτο να τα τέμνει σε μια ευθεία,
- και τα τρία επίπεδα να συμπίπτουν.

Στις τρεις πρώτες περιπτώσεις το σύστημα δεν έχει λύση, στις άλλες τρεις έχει άπειρες λύσεις.

Δραστηριότητα 2.2 Σε ποιά από τις παραπάνω περιπτώσεις αντιστοιχεί κάθε ένα από τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων;

α′.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ 4u & + & 2v & + & 2w & = & 10 \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 \end{array}$$

β′.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ 4u & + & 2v & + & 2w & = & 8 \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 \end{array}$$

γ′.

$$\begin{array}{rcrcr} & & u & = & 0 \\ & & v & = & 0 \\ u & + & v & = & 9 \end{array}$$

Μπορούμε να κοιτάξουμε και πάλι το σύστημα (2.4) ως μια διανυσματική εξίσωση,

$$u \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Από αυτή τη σκοπιά, θέλουμε να βρούμε τους συντελεστές u, v και w ώστε ο συνδυασμός στα αριστερά να είναι ίσος με το αριθμητικό διάνυσμα στα δεξιά. Γεωμετρικά, το άθροισμα τριών διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^3$ είναι η διαγώνιος του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα τρία διανύσματα. Ετσι, εάν τα τρία διανύσματα αποτελούν ακμές ενός παραλληλεπιπέδου, τότε υπάρχει μοναδική λύση, σε αυτήν την περίπτωση $(u, v, w) = (1, 1, 2)$.

Τί άλλο μπορεί να συμβεί; Εάν τα τρία διανύσματα δεν αποτελούν ακμές ενός παραλληλεπιπέδου, αλλά βρίσκονται και τα τρία σε ένα επίπεδο, τότε το σύστημα έχει λύση μόνον εάν και το διάνυσμα στα δεξιά βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο. Διαφορετικά δεν έχει λύση. Εξετάζουμε το παράδειγμα

$$u \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = b\,.$$

Εάν

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

τότε η εξίσωση έχει λύση. Εάν

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

τότε η εξίσωση δεν έχει λύση.

> **Δραστηριότητα 2.3** Βρείτε τιμές των συντελεστών u, v και w τέτοιες ώστε η πρώτη συνιστώσα του
>
> $$u \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
>
> να είναι 5, και η δεύτερη συνιστώσα να είναι 1.

Βλέπουμε οτι υπάρχουν δύο διαφορετικές γεωμετρικές ερμηνείες των συστημάτων γραμμικών εξισώσεων με δύο και τρεις αγνώστους. Η προσεκτική ανάλυση θα αποκαλύψει τη σχέση ανάμεσα στις δύο προσεγγίσεις, που ενώ τη διαισθανόμαστε δεν είναι εύκολο να την προσδιορίσουμε ακριβώς. Το πιο σημαντικό είναι οτι θα μας ελευθερώσει από τους περιορισμούς της γεωμετρικής διαίσθησης, και θα μας επιτρέψει να μελετήσουμε συστήματα πολλών εξισώσεων με πολλούς αγνώστους.

2.2 Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$

Ορισμός 2.1. Ορίζουμε

$$\mathbb{R}^0 = \{0\} \text{ και } \mathbb{R}^n = \{(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R},\, i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n\}\,.$$

Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ θα τα ονομάζουμε **αριθμητικά διανύσματα με n συνιστώσες** ή απλώς **διανύσματα**, και το σύνολο $\mathbb{R}^n$ θα το αποκαλούμε **διανυσματικό χώρο**. Οι πραγματικοί αριθμοί $x_1, \ldots, x_n$ ονομάζονται **συνιστώσες** του διανύσματος $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Σε αυτό το μάθημα, συνήθως, θα παριστάνουμε τα διανύσματα ως στήλες,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

αν και για λόγους τυπογραφικής οικονομίας, καμιά φορά θα γράφουμε τις συνιστώσες του διανύσματος χωρισμένες με κόμα, οριζόντια, σε παρενθέσεις, $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$.

Στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ των διανυσμάτων με n συνιστώσες, ορίζουμε δύο πράξεις, την **πρόσθεση διανυσμάτων** και τον **πολλαπλασιασμό διανύσματος με πραγματικό αριθμό**.

Η πρόσθεση γίνεται συνιστώσα προς συνιστώσα, όπως στο παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Γενικά,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

Ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με πραγματικό αριθμό, γίνεται επίσης κατά συνιστώσα, όπως στο παράδειγμα:

$$\sqrt{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Γενικά,

$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}.$$

Ενας **γραμμικός συνδυασμός** διανυσμάτων είναι ένα άθροισμα των διανυσμάτων, πολλαπλασιασμένων με πραγματικούς αριθμούς (συντελεστές), για παράδειγμα

$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n + \gamma z_n \end{bmatrix}.$$

Ενα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, μπορούμε επίσης να το θεωρήσουμε με δύο τρόπους:

- Η κάθε γραμμή-εξίσωση, παριστάνει ένα ‘‘επίπεδο’’[1] μέσα στο $\mathbb{R}^n$, και το σύστημα έχει μοναδική λύση εάν τα n ‘‘επίπεδα’’ τέμνονται σε ένα μόνον σημείο.
- Η κάθε στήλη παριστάνει ένα διάνυσμα, και αναζητούμε τους συντελεστές ενός γραμμικού συνδυασμού των διανυσμάτων στην αριστερή πλευρά ώστε να είναι ίσος με το διάνυσμα στη δεξιά πλευρά.

2.3 Επίλυση συστήματος τριών εξισώσεων με απαλοιφή Gauss

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Θα μελετήσουμε τη μέθοδο της **απαλοιφής Gauss** (Gauss elimination), η οποία είναι κατάλληλη για την επίλυση μεγάλων συστημάτων, με πολλές εξισώσεις και πολλούς αγνώστους. Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε την απαλοιφή Gauss στο απλό παράδειγμα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους του συστήματος (2.4). Θέλουμε να δούμε συστηματικά τα βήματα της μεθόδου, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα τόσο για υπολογισμούς όσο και για τη θεωρητική μελέτη των διανυσματικών χώρων.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ 4u & - & 6v & & & = & -2 \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 \end{array}$$

Παρατηρούμε οτι ο συντελεστής του u στην πρώτη εξίσωση δεν είναι 0. Αρα, εάν αφαιρέσουμε κατάλληλα πολλαπλάσια της πρώτης εξίσωσης από όλες τις άλλες, μπορούμε να κάνουμε τους συντελεστές του u σε όλες τις εξισώσεις, εκτός από την πρώτη, ίσους με 0, δηλαδή να *απαλείψουμε* το u από αυτές τις εξισώσεις. Συγκεκριμένα

[1] Διάστασης $n-1$!

- Αφαιρούμε 2 φορές την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη.

- Αφαιρούμε -1 φορά την πρώτη εξίσωση από την τρίτη (δηλαδή προσθέτουμε την πρώτη εξίσωση στην τρίτη).

Ο μη μηδενικός συντελεστής του u στην πρώτη εξίσωση ονομάζεται **πρώτος οδηγός**. Βρήκαμε τους **πολλαπλασιαστές** 2 και -1 διαιρώντας τους συντελεστές του u στη δεύτερη και την τρίτη εξίσωση με τον πρώτο οδηγό. Προκύπτει το νέο σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ & & -8v & - & 2w & = & -12 \\ & & 8v & + & 3w & = & 14 \end{array}$$

στο οποίο ο u έχει μηδενικό συντελεστή σε όλες τις εξισώσεις εκτός από την πρώτη. Παρατηρούμε οτι ο συντελεστής του v στη δεύτερη εξίσωση δεν είναι 0. Αυτός είναι ο **δεύτερος οδηγός**, τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να απαλείψουμε το v από την τρίτη εξίσωση.

- Αφαιρούμε -1 φορά τη δεύτερη εξίσωση από την τρίτη.

Αυτό το βήμα ολοκληρώνει την απαλοιφή Gauss. Προκύπτει το νέο σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ & & -8v & - & 2w & = & -12 \\ & & & & w & = & 2 \end{array}$$

στο οποίο ο v έχει μηδενικό συντελεστή 'σε όλες τις εξισώσεις εκτός από την πρώτη και τη δεύτερη'. Ο συντελεστής του w στην τρίτη εξίσωση δεν είναι 0 και είναι ο **τρίτος οδηγός**.

Είναι εύκολο να λύσουμε αυτό το σύστημα. Από την τρίτη εξίσωση έχουμε

$$w = 2\,.$$

Αντικαθιστούμε το w στη δεύτερη εξίσωση, $-8v - 4 = -12$, άρα

$$v = 1\,.$$

Αντικαθιστούμε τα v και w στην πρώτη εξίσωση, $2u + 1 + 2 = 5$, άρα

$$u = 1\,.$$

Αυτή η διαδικασία ονομάζεται **ανάδρομη αντικατάσταση** (back substitution).

Η απαλοιφή Gauss βασίζεται στην παρατήρηση οτι εάν κάποιες τιμές των u, v και w ικανοποιούν ένα σύστημα εξισώσεων, τότε ακριβώς οι ίδιες τιμές ικανοποιούν και κάθε σύστημα που προκύπτει από το αρχικό με έναν από τους ακόλουθους δύο τρόπους:

- Εάν αλλάξουμε τη σειρά με την οποία γράφουμε τις εξισώσεις

- Εάν πολλαπλασιάσουμε μία εξίσωση με έναν αριθμό, και αφαιρέσουμε αυτό το πολλαπλάσιο από μία από τις άλλες εξισώσεις.

Κατά την απαλοιφή Gauss επαναλαμβάνουμε συστηματικά αυτά τα δύο βήματα, ώστε να καταλήξουμε σε ένα απλούστερο σύστημα, για το οποίο μπορούμε εύκολα να βρούμε το σύνολο λύσεων.

Καταγράφουμε πιο οικονομικά τη διαδικασία της απαλοιφής χρησιμοποιώντας έναν πίνακα με τους συντελεστές της εξίσωσης και τη δεξιά πλευρά:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 4 & -6 & 0 & \vdots & -2 \\ -2 & 7 & 2 & \vdots & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & \mathbf{-8} & -2 & \vdots & -12 \\ 0 & 8 & 3 & \vdots & 14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & \mathbf{-8} & -2 & \vdots & -12 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

Οι οδηγοί, που εμφανίζονται με παχιά στοιχεία στον πίνακα, πρέπει να μη μηδενίζονται, εφόσον θέλουμε να διαιρέσουμε με αυτούς. Εαν λοιπόν στη διαδικασία της απαλοιφής σε ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, εμφανίζονται n (μη μηδενικοί) οδηγοί, τότε υπάρχει μια και μοναδική λύση του συστήματος, την οποία βρίσκουμε με ανάδρομη αντικατάσταση.

Εάν σε κάποιο βήμα της διαδικασίας απαλοιφής εμφανίζεται μηδέν στη θέση ενός οδηγού, τότε υπάρχουν δύο ενδεχόμενα.

α'. Εάν υπάρχει μη μηδενικός συντελεστής σε κάποια πιο κάτω θέση στη στήλη που εξετάζουμε, τότε αλλάζουμε τη σειρά των εξισώσεων, δηλαδή εναλλάσσουμε τις γραμμές του πίνακα, ώστε να φέρουμε το μη μηδενικό συντελεστή στη θέση του οδηγού. Για το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcrcl} u & + & v & + & w & = & a \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = & b \\ 4u & + & 6v & + & 8w & = & c \end{array} \tag{2.6}$$

έχουμε

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & \vdots & a \\ 2 & 2 & 5 & \vdots & b \\ 4 & 6 & 8 & \vdots & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & \vdots & a \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -2a+b \\ 0 & 2 & 4 & \vdots & -4a+c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & \vdots & a \\ 0 & \mathbf{2} & 4 & \vdots & -4a+c \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & \vdots & -2a+b \end{bmatrix}$$

Ετσι έχουμε πλήρες σύνολο οδηγών, και το σύστημα έχει μοναδική λύση.

β'. Εάν όλοι οι συντελεστές στις πιο κάτω θέσεις στη στήλη που εξετάζουμε είναι μηδέν, τότε δεν μπορούμε να βρούμε πλήρες σύνολο οδηγών. Το σύστημα ονομάζεται **ιδιόμορφο**. Για παράδειγμα, στο σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} u & + & v & + & w & = & a \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = & b \\ 4u & + & 4v & + & 8w & = & c \end{array}$$

μετά την απαλοιφή των συντελεστών του u, έχουμε

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 5 & b \\ 4 & 4 & 8 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 3 & -2a+b \\ 0 & 0 & 4 & -4a+c \end{array}\right]$$

και δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανάδρομη αντικατάσταση για να βρούμε μία μοναδική λύση. Ενα ιδιόμορφο σύστημα μπορεί να μην έχει καμία λύση, ή να έχει άπειρες λύσεις. Αυτό εξαρτάται από τη δεξιά πλευρά.

- Εάν $-2a+b=6$ και $-4a+c=7$, τότε έχουμε

  $$\begin{aligned} 3w &= 6 \\ 4w &= 7 \end{aligned}$$

  και δεν υπάρχει λύση. Το σύστημα είναι **ασύμβατο**.

- Εάν όμως $-2a+b=6$ και $-4a+c=8$, τότε έχουμε

  $$\begin{aligned} 3w &= 6 \\ 4w &= 8 \end{aligned}$$

  και $w=2$. Αλλά η πρώτη εξίσωση δεν μπορεί να προσδιορίσει και το u και το v. Για κάθε τιμή του u υπάρχει και μία τιμή του v που δίνει λύση. Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και είναι **απροσδιόριστο**.

2.4 Ο αλγόριθμος της απαλοιφής

Θέλουμε να δούμε τη διαδικασία της απαλοιφής σαν έναν αλγόριθμο, δηλαδή μία σειρά από εντολές, τις οποίες εάν ακολουθήσουμε πιστά θα καταλήξουμε σε κάποιο αποτέλεσμα.

Ξεκινάμε με τους συντελεστές ενός συστήματος τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

1. Ελέγχουμε εάν $a_{11} \neq 0$. Εάν όχι, πάμε στο 4.
   Εάν ναι, αφαιρούμε $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ φορές τη γραμμή 1 από τη γραμμή 2, και αφαιρούμε $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ φορές τη γραμμή 1 από τη γραμμή 3.

2. Ελέγχουμε εάν (το νέο στοιχείο) $a_{22} \neq 0$. Εάν όχι, πάμε στο 6.
   Εάν ναι, αφαιρούμε $\frac{a_{32}}{a_{22}}$ φορές τη (νέα) γραμμή 2 από τη (νέα) γραμμή 3.

3. Ελέγχουμε εάν (το νέο στοιχείο) $a_{33} \neq 0$. Εάν όχι, πάμε στο 7. Εάν ναι, το σύστημα έχει μοναδική λύση, την οποία υπολογίζουμε με ανάδρομη αντικατάσταση.

4. Ελέγχουμε εάν $a_{21} \neq 0$. Εάν όχι, πάμε στο 5.
   Εάν ναι, εναλλάσσουμε τις γραμμές 1 και 2, και πάμε πίσω στο 1.

5. Ελέγχουμε εάν $a_{31} \neq 0$. Εάν όχι, πάμε στο 7.
   Εάν ναι, εναλλάσσουμε τις γραμμές 1 και 3, και πάμε πίσω στο 1.

6. Ελέγχουμε εάν $a_{32} \neq 0$. Εάν όχι, πάμε στο 7.
   Εάν ναι, εναλλάσσουμε τις γραμμές 2 και 3, και πάμε πίσω στο 2.

7. Το σύστημα είναι ιδιόμορφο, και δεν έχει μοναδική λύση.

Όταν έχουμε να λύσουμε συστήματα πολλών εξισώσεων με πολλούς αγνώστους, μας ενδιαφέρει να χρησιμοποιήσουμε μία μέθοδο στην οποία βρίσκουμε το αποτέλεσμα με το μικρότερο δυνατό αριθμό πράξεων. Θα υπολογίσουμε το ''κόστος'' της επίλυσης με απαλοιφή και ανάδρομη αντικατάσταση ενός συστήματος n εξισώσεων με n αγνώστους.

Θεωρούμε οτι μία διαίρεση έχει το ίδιο ''κόστος'' με έναν πολλαπλασιασμό και μία αφαίρεση, ενώ ο έλεγχος εάν ένας αριθμός είναι μηδέν και η εναλλαγή των γραμμών του συστήματος έχουν αμελητέο ''κόστος''. Εφαρμόζουμε τη διαδικασία σε ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, στο οποίο η απαλοιφή Gauss βρίσκει τους n οδηγούς χωρίς να χρειαστούν εναλλαγές. Ξεκινάμε με τον επαυξημένο πίνακα συντελεστών

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Για να απαλείψουμε την πρώτη μεταβλητή από τη δεύτερη εξίσωση, υπολογίζουμε τον πολλαπλασιαστή $m = \frac{a_{21}}{a_{11}}$ και μετά αφαιρούμε το ma_{1j} από το a_{2j}, για $j = 2, \dots, n$ και αφαιρούμε το mb_1 από το b_2. Δηλαδή έχουμε 1 διαίρεση και $(n-1)+1$ πολλαπλασιασμούς και αφαιρέσεις. Συνολικό κόστος $n+1$.

Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία για τις $n-1$ γραμμές $2, \dots, n$. Άρα η απαλοιφή της πρώτης μεταβλητής έχει συνολικό κόστος $(n+1)(n-1) = n^2 - 1$.

Για να απαλείψουμε τη δεύτερη μεταβλητή από τις γραμμές $3, \dots, n$ έχουμε κόστος $n(n-2) = (n-1)^2 - 1$. Για την απαλοιφή της τρίτης μεταβλητής, το κόστος είναι $(n-1)(n-3) = (n-2)^2 - 1$. Το συνολικό κόστος της απαλοιφής Gauss είναι

$$\begin{aligned} (2^2-1)+(3^2-1)+\cdots+(n^2-1) &= (1^2+2^2+\cdots+n^2) - n \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n \\ &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n\,. \end{aligned}$$

Το κόστος της ανάδρομης ανατικατάστασης είναι 1 για να υπολογίσουμε την τελευταία μεταβλητή, 2 για να υπολογίσουμε την προτελευταία, $3, 4, \dots, n$ για τις υπόλοιπες. Συνολικά,

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\,.$$

Άρα το συνολικό κόστος της επίλυσης ενός συστήματος n εξισώσεων με n αγνώστους με απαλοιφή Gauss και ανάδρομη αντικατάσταση είναι

$$\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n\,.$$

Δραστηριότητα 2.4 Ακολουθήστε συστηματικά τα βήματα της διαδικασίας της απαλοιφής και ανάδρομης αντικατάστασης για να λύσετε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & 4v & + & 2w & = & 4 \\ 3u & + & 8v & + & w & = & 12 \\ 2u & + & 8v & + & 3w & = & 6 \end{array}$$

και μετρήστε τις διαιρέσεις και τους πολλαπλασιασμούς που κάνατε.

Δραστηριότητα 2.5 Λύστε το σύστημα της Δραστηριότητας 2.4 με τη μέθοδο της αντικατάστασης: Χρησιμοποιήστε την πρώτη εξίσωση για να αντικαταστήσετε την πρώτη μεταβλητή στη δεύτερη και την τρίτη εξίσωση. Κατόπιν χρησιμοποιήστε τη (νέα) δεύτερη εξίσωση για να αντικαταστήσετε τη δεύτερη μεταβλητή στην τρίτη εξίσωση. Τέλος χρησιμοποιήστε ανάδρομη αντικατάσταση για να βρείτε τη λύση. Μετρήστε τις διαιρέσεις και τους πολλαπλασιασμούς που κάνατε, και συγκρίνετε με τη μέθοδο της απαλοιφής.

2.5 Πίνακες

Για μεγαλύτερα συστήματα δεν είναι πρακτικό να γράφουμε αναλυτικά κάθε εξίσωση και να καταγράφουμε την απαλοιφή. Ο συμβολισμός πινάκων είναι πολύ χρήσιμος.

Στη δεξιά πλευρά μιας εξίσωσης έχουμε ένα διάνυσμα-στήλη, b. Στην εξίσωση (2.5),

$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Στην αριστερή πλευρά, έχουμε τους αγνώστους, τους οποίους επίσης γράφουμε ως ένα διάνυσμα-στήλη,

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Τέλος έχουμε τους 9 συντελεστές, τους οποίους γράφουμε ως ένα πίνακα, με τρεις γραμμές και τρεις στήλες,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Αυτός είναι ένας τετραγωνικός πίνακας 3 επί 3.

Ορισμός 2.2. Ενας **m** επί **n πίνακας**, ή πίνακας με **m γραμμές** και **n στήλες** είναι μια διάταξη mn πραγματικών αριθμών σε m γραμμές και n στήλες, κλεισμένη σε ορθογώνιες παρενθέσεις [,]. Εάν $m = n$ λέμε οτι ο πίνακας είναι **τετραγωνικός**. Εάν $m \neq n$ λέμε οτι ο πίνακας είναι **παραλληλόγραμμος**.

Οι πίνακες **προστίθενται** κατά συνιστώσα, και **πολλαπλασιάζονται με αριθμούς**, ακριβώς όπως τα διανύσματα. Συχνά θα θεωρούμε ένα n-διάνυσμα ως ένα $n \times 1$ πίνακα. Μπορούμε να προσθέσουμε δύο πίνακες *μόνον εάν έχουν τις ίδιες διαστάσεις*, δηλαδή τον ίδιο αριθμό γραμμών και τον ίδιο αριθμό στηλών. Για παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{6} & -5 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1+\sqrt{6} & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

$$3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 12 & -18 & 0 \end{bmatrix} .$$

Χρειαζόμαστε συμβολισμό για να αναφερόμαστε σε κάθε συνιστώσα ενός πίνακα. Η συνιστώσα στη *γραμμή* i και στη *στήλη* j συμβολίζεται a_{ij}. Ετσι ο $m \times n$ πίνακας A συμβολίζεται

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Μια συντόμευση αυτού του συμβολισμού είναι να γράφουμε $A = [a_{ij}]$. Ετσι, εάν $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$ είναι $m \times n$ πίνακες έχουμε $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$. Επίσης συμβολίζουμε $(A + B)_{ij}$ τη συνιστώσα στη θέση ij του αθροίσματος $A + B$, και έχουμε

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} ,$$

ενώ

$$(\alpha B)_{ij} = \alpha b_{ij} .$$

Είδαμε οτι η αριστερή πλευρά της εξίσωσης (2.5) μπορεί να θεωρηθεί ως ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A, (2.8), με συντελεστές τις συνιστώσες του διανύσματος x, (2.7). Τέτοιοι συνδυασμοί εμφανίζονται συχνά, και μας οδηγούν να ορίσουμε μια πράξη μεταξύ πινάκων και διανυσμάτων.

Ορισμός 2.3. Το **γινόμενο** του $m\times n$ πίνακα A με το n-διάνυσμα x είναι ένα m-διάνυσμα Ax, του οποίου η συνιστώσα στη θέση i είναι ο γραμμικός συνδυασμός των συνιστωσών του x με συντελεστές τις συνιστώσες της i-γραμμής του A. Δηλαδή $Ax = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, όπου

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n, \text{ για } i = 1, \ldots, m.$$

Προσέξτε τη σχέση ανάμεσα στις διαστάσεις του $m \times n$ πίνακα A, του n-διανύσματος x και του m-διανύσματος Ax.

Παράδειγμα 2.1 Το γινόμενο ενός 3×3 πίνακα με ένα 3-διάνυσμα είναι ένα 3-διάνυσμα,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+10+0 \\ 6+0+0 \\ 2+5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

αλλά το γινόμενο ενός 2×3 πίνακα με ένα 3-διάνυσμα είναι ένα 2-διάνυσμα,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+10+0 \\ 6+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Ελέγχουμε οτι το διάνυσμα Ax είναι πράγματι ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A με συντελεστές τις συνιστώσες του διανύσματος x:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Για να αναφερθούμε στις συνιστώσες τέτοιων γινομένων, συχνά χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\sum$ για αθροίσματα:

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\,.$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε τις στήλες ενός πίνακα B ως διανύσματα, και να πολλαπλασιάσουμε κάθε στήλη του B με τον πίνακα A. Τότε θα προκύψει ένας νέος πίνακας. Ορίζουμε τον **πολλαπλασιασμό πινάκων**.

Ορισμός 2.4. Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα A και τον $n \times p$ πίνακα B. Το **γινόμενο** AB είναι ο $m \times p$ πίνακας, ο οποίος έχει συνιστώσα στη θέση ij το γραμμικό συνδυασμό των συνιστωσών της j-στήλης του πίνακα B με συντελεστές τις συνιστώσες της i-γραμμής του πίνακα A,

$$(AB)_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του αθροίσματος, η συνιστώσα ij του πίνακα AB είναι

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \text{ για } i = 1, \dots, m \text{ και } j = 1, \dots, p.$$

Για να ορίζεται το γινόμενο πρέπει ο αριθμός των στηλών του A να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του B.

Παράδειγμα 2.2 Πολλαπλασιασμός με τον 2×2 πίνακα I αφήνει αμετάβλητο τον 2×3 πίνακα B:

$$IB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 2.3 Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι μεταθετικός, ακόμη και όταν ορίζονται και οι δύο πίνακες AB και BA:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 2.4 Θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τη διαδικασία της απαλοιφής μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων. Πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα συντελεστών 2.8 με έναν πίνακα F με μία γραμμή

$$FA = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 & -2 \end{bmatrix}.$$

Η κάθε συνιστώσα του 1×3 πίνακα στα δεξιά είναι ο γραμμικός συνδυασμός των συνιστωσών της αντίστοιχης στήλης του πίνακα A με συντελεστές τις συνιστώσες του πίνακα F. Παρατηρούμε οτι ολόκληρη η γραμμή στα δεξιά είναι ο γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του πίνακα A με συντελεστές τις συνιστώσες του πίνακα F. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το αποτέλεσμα είναι να αφαιρέσουμε 2 φορές την πρώτη γραμμή του πίνακα από τη δεύτερη, δηλαδή ακριβώς αυτό που κάναμε στο πρώτο βήμα της απαλοιφής στο σύστημα (2.4).

Εφαρμόζουμε τον ίδιο κανόνα με τον 1×3 πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Το αποτέλεσμα είναι η τρίτη γραμμή του πίνακα. Από αυτές τις παρατηρήσεις οδηγούμαστε στη δυνατότητα να εκφράσουμε το πρώτο βήμα της απαλοιφής μέσω πολλαπλασιασμού του πίνακα A από τα αριστερά με έναν πίνακα E:

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Παράδειγμα 2.5 Πολλαπλασιασμός από τα αριστερά με τον πίνακα P εναλλάσσει τις γραμμές του B, πολλαπλασιασμός με τον P από τα δεξιά εναλλάσσει τις στήλες του B:

$$PB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$BP = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Εκτός από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων που δώσαμε, στην ακόλουθη πρόταση δίδουμε δύο διαφορετικές θεωρήσεις του πολλαπλασιασμού, που είναι συχνά πολύ χρήσιμες. Στις Ασκήσεις 2.8 και 2.12 θα δούμε άλλες δύο θεωρήσεις: τον πολλαπλασιασμό σε μπλοκ και το γινόμενο ως άθροισμα γινομένων στηλών με γραμμές. Είναι σημαντικό να έχετε μία ευέλικτη αντίληψη του πολλαπλασιασμού πινάκων, ώστε σε κάθε περίπτωση να χρησιμοποιείτε την καταλληλότερη θεώρηση.

Πρόταση 2.1

1. *Η i-γραμμή του πίνακα AB είναι ίση με το γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του B με συντελεστές τις συνιστώσες της i-γραμμής του A.*

2. *Η j-στήλη του πίνακα AB είναι ίση με το γραμμικό συνδυασμό των στηλών του A με συντελεστές τις συνιστώσες της j-στήλης του B.*

Απόδειξη. Η i-γραμμή του AB είναι

$$\begin{bmatrix} (AB)_{i1} & \ldots & (AB)_{ip} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kp} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \begin{bmatrix} b_{k1} & \ldots & b_{kp} \end{bmatrix}.$$

Γράψτε τον ανάλογο υπολογισμό για τις στήλες.

$\square$

Παράδειγμα 2.6 Θεωρούμε τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και το γινόμενο $C = AB$.

Για να υπολογίσουμε τη συνιστώσα στη θέση 11 του πίνακα C, χρησιμοποιούμε την πρώτη γραμμή του A και την πρώτη στήλη του B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 5\,.$$

Για να υπολογίσουμε τη συνιστώσα στη θέση 21 του πίνακα C, χρησιμοποιούμε τη δεύτερη γραμμή του A και την πρώτη στήλη του B:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 0 = -2\,.$$

Άρα η πρώτη στήλη του πίνακα C είναι $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Σύμφωνα με την εναλλακτική θεώρηση του πολλαπλασιασμού, μπορούμε να εκφράσουμε την πρώτη στήλη του γινομένου C, ως γραμμικό συνδυασμό των στηλών του πίνακα A, χρησιμοποιώντας ως συντελεστές τις συνιστώσες της πρώτης στήλης του B:

$$2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ανάλογα εκφράζουμε τις γραμμές του γινομένου. Η δεύτερη γραμμή του C είναι $\begin{bmatrix} 5 & -3 \end{bmatrix}$. Μπορούμε να την εκφράσουμε ως γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του πίνακα B, χρησιμοποιώντας ως συντελεστές τις συνιστώσες της δεύτερης γραμμής του A:

$$0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Θα δούμε οτι αυτές οι εναλλακτικές θεωρήσεις του πολλαπλασιασμού είναι συχνά χρήσιμες για να κατανοήσουμε καλύτερα ένα πρόβλημα.

Πρόταση 2.2 *Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι προσεταιριστικός, και επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση. Συγκεκριμένα, εάν A, B είναι $m \times n$ πίνακες, C, D είναι $n \times p$ πίνακες και E είναι $p \times q$ πίνακας, τότε*

1. $$A(CE) = (AC)E\,,$$

2. $$A(C+D) = AC + AD \quad , \quad (A+B)C = AC + BC\,.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας αποτελεί άσκηση στη χρήση του συμβολισμού $\sum$ για τα αθροίσματα. Για $i = 1, \ldots, m$ και $j = 1, \ldots, q$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
(A(CE))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(CE)_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{t=1}^{p} c_{kt}e_{tj}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{p} a_{ik}c_{kt}e_{tj}
\end{aligned}$$

αλλά μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά με την οποία παίρνουμε τα αθροίσματα,

$$\begin{aligned}
(A(CE))_{ij} &= \sum_{t=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kt}e_{tj} \\
&= \sum_{t=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kt}\right)e_{tj} \\
&= \sum_{t=1}^{p}(AC)_{it}e_{tj} \\
&= ((AC)E)_{ij}\,.
\end{aligned}$$

Η επαλήθευση της επιμεριστικής ιδιότητας είναι απλούστερη και αφήνεται ως άσκηση.

□

2.6 Το κόστος του πολλαπλασιασμού

Θεωρούμε το γινόμενο ενός $m \times n$ πίνακα A και ενός $n \times p$ πίνακα B. Για να υπολογίσουμε κάθε συνιστώσα του γινομένου AB πρέπει να κάνουμε n πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}\,.$$

Άρα για να υπολογίσουμε όλες τις mp συνιστώσες του γινομένου AB απαιτούνται mpn πολλαπλασιασμοί.

Ειδικότερα, το κόστος του πολλαπλασιασμού δύο τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων είναι n^3.

Μία σημαντική παρατήρηση είναι οτι παρ' όλο που τα γινόμενα $(AB)C$ και $A(BC)$ είναι ίσα, το κόστος του υπολογισμού είναι διαφορετικό, και μπορεί να είναι σημαντικά μεγαλύτερο για το ένα απ' ότι για το άλλο. Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, B είναι $n \times p$ και C είναι $p \times q$, τότε το κόστος του υπολογισμού του γινομένου $(AB)C$ είναι $mnp + mpq$, ενώ το κόστος του υπολογισμού του γινομένου $A(BC)$ είναι $mnq + npq$.

Για παράδειγμα, εάν $m = 3$, $n = 2$, $p = 5$ και $q = 2$, για να υπολογίσουμε το γινόμενο $(AB)C$ χρειάζονται 60 πολλαπλασιασμοί, ενώ για να υπολογίσουμε το γινόμενο $A(BC)$ χρειάζονται μόνον 32.

Άσκηση 2.1 Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.2 Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ \pi/2 \\ \sqrt{2}/3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6\cos(\pi/6) & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.3 Χωρίς να υπολογίσετε το γινόμενο πινάκων AB, εκφράστε την τρίτη στήλη και την πρώτη γραμμή του γινομένου ως γραμμικό συνδυασμό των γραμμών ή των στηλών των πινάκων A και B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 7 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.4 Υπολογίστε το γινόμενο Ax για να βρείτε μία λύση του συστήματος $Ax =$ μηδενικό διάνυσμα. Μπορείτε να βρείτε άλλες λύσεις του $Ax = 0$;

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.5 Γράψτε τους 3 επί 3 πίνακες A και B με συνιστώσες

$$a_{ij} = i - j \quad \text{και} \quad b_{ij} = \frac{1}{j}.$$

και υπολογίστε τα γινόμενα AB, BA και A^2.

Άσκηση 2.6 Εάν οι συνιστώσες του πίνακα A είναι a_{ij}, χρησιμοποιήστε το συμβολισμό των δεικτών για να γράψετε

1. τον πρώτο οδηγό
2. τον πολλαπλασιαστή λ_{i1} της πρώτης γραμμής όταν την αφαιρούμε από την γραμμή i
3. Τη νέα συνιστώσα που αντικαθιστά την a_{ij} μετά αυτή την αφαίρεση.
4. το δεύτερο οδηγό.

Άσκηση 2.7 Περιγράψτε τις γραμμές του γινομένου EA, και τις στήλες του AE, όταν

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.8 Θεωρούμε οτι οι στήλες του $n \times n$ πίνακα A είναι τα διανύσματα $c_1, c_2, \ldots, c_n$, και οι γραμμές του $n \times n$ πίνακα B είναι τα διανύσματα-γραμμές $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Το γινόμενο $c_i r_i$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας (δείτε το Παράδειγμα 2.3). Εκφράστε το γινόμενο AB ως άθροισμα τέτοιων πινάκων.

Άσκηση 2.9 Αποδείξτε την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό αθροίσματος $\sum$.

Άσκηση 2.10 Βρείτε πόσους πολλαπλασιασμούς αριθμών χρειάζεται να κάνετε για να πολλαπλασιάσετε ένα 2×3 πίνακα με ένα 3×5 πίνακα.

Άσκηση 2.11 Αληθές ή ψευδές; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

1. Εάν η πρώτη και η τρίτη στήλη του πίνακα A είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και την τρίτη στήλη του πίνακα AB.
2. Εάν η πρώτη και η τρίτη στήλη του πίνακα B είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και την τρίτη στήλη του πίνακα AB.
3. Εάν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του πίνακα A είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και την τρίτη γραμμή του πίνακα AB.
4. Εάν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του πίνακα B είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και την τρίτη γραμμή του πίνακα AB.

Άσκηση 2.12 Ο πολλαπλασιασμός σε μπλόκ χωρίζει τους πίνακες σε υποπίνακες. Εάν το σχήμα των υποπινάκων επιτρέπει τον πολλαπλασιασμό τους, τότε αυτός δίδει το σωστό αποτέλεσμα.

1. Αντικαταστείστε 2×2 πίνακες για τα A και C, 2×1 πίνακα για το B και 1×2 πίνακα για το D και επαληθεύστε οτι

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC + BD \end{bmatrix}.$$

2. Αντικαταστείστε τα x με αριθμούς, και επαληθεύστε τον πολλαπλασιασμό σε μπλόκ

$$\left[\begin{array}{cc|c} x & x & x \\ x & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} x & x & x \\ x & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x \end{array}\right]$$

Άσκηση 2.13 Απαλοιφή σε μπλόκ. Εάν το άνω αριστερά μπλόκ είναι αντιστρέψιμος πίνακας, πολλαπλασιάστε την πρώτη γραμμή του μπλόκ με CA^{-1} και αφαιρέστε από τη δεύτερη, για να βρείτε τον πίνακα S.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & S \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.14 Εάν A είναι πίνακας $m \times n$ και B είναι πίνακας $n \times r$, δείξτε οτι για τον υπολογισμό του γινομένου AB απαιτούνται mnr πολλαπλασιασμοί αριθμών. (Σε αυτό το πρόβλημα δεν μας απασχολεί ο αριθμός των προσθέσεων). Εάν C είναι πίνακας $r \times p$, βρείτε πόσοι πολλαπλασιασμοί αριθμών απαιτούνται για τον υπολογισμό των γινομένων $(AB)C$ και $A(BC)$.

Άσκηση 2.15 Δίδονται πίνακες A, B, C, D με τα ακόλουθα μεγέθη: $A : 5 \times 14$, $B : 14 \times 87$, $C : 87 \times 3$ και $D : 3 \times 42$. Βρείτε πόσοι πολλαπλασιασμοί απαιτούνται για να υπολογίσετε το γινόμενο $ABCD$ με τους ακόλουθους τρόπους

1. $(A(BC))D$
2. $A(B(CD))$

2.7 Αντίστροφοι πίνακες

Σε αυτήν τη παράγραφο περιοριζόμαστε σε τετραγωνικούς πίνακες. Ορίζουμε κάποιες ειδικές κατηγορίες τετραγωνικών πινάκων

Ορισμός 2.5. Ο τετραγωνικός πίνακας που έχει 1 στη διαγώνιο και 0 σε όλες τις άλλες θέσεις, ονομάζεται **ταυτοτικός πίνακας**, και συμβολίζεται $\mathbf{I}$, ή $\mathbf{I}_n$ όταν θέλουμε να επισημάνουμε το μέγεθος του πίνακα.

Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν πίνακα με τον ταυτοτικό πίνακα, είτε από τα αριστερά είτε από τα δεξιά, αυτός δεν αλλάζει.

Δραστηριότητα 2.6 Πολλαπλασιάστε τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ από τα αριστερά με τον πίνακα $\mathbf{I}_2$ και από τα δεξιά με τον $\mathbf{I}_4$.

Ορισμός 2.6. Ο τετραγωνικός πίνακας που έχει 1 στη διαγώνιο και $\lambda \neq 0$ σε κάποια θέση ij για $i \neq j$, ενώ έχει 0 στις υπόλοιπες θέσεις, ονομάζεται **στοιχειώδης πίνακας**, και συμβολίζεται $E_{ij}(\lambda)$.

Οταν πολλαπλασιάζουμε ένα πίνακα A από τα *αριστερά* με το στοιχειώδη πίνακα $E_{ij}(-\lambda)$, το αποτέλεσμα είναι να αφαιρούμε λ φορές τη γραμμή j από τη γραμμή i του A.

Οταν πολλαπλασιάζουμε ένα πίνακα A από τα *δεξιά* με τον $E_{ij}(-\lambda)$, το αποτέλεσμα είναι να αφαιρούμε λ φορές τη στήλη i από τη στήλη j του A. Προσέξτε τη διαφορά στη διάταξη των δεικτών

Δραστηριότητα 2.7 Πολλαπλασιάστε τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ από τα αριστερά με τον πίνακα $E_{12}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ και από τα δεξιά με τον $E_{23}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ορισμός 2.7. Ονομάζουμε **πίνακα εναλλαγής** P_{ij} τον πίνακα που εναλλάσει την i γραμμή και τη j γραμμή του πίνακα A όταν πολλαπλασιάζουμε τον A με τον P_{ij} από τα αριστερά. Ο πίνακας P_{ij} έχει 1 στις θέσεις ij και ji, έχει 1 στη διαγώνιο εκτός από τις θέσεις ii και jj, ενώ έχει 0 σε όλες τις υπόλοιπες θέσεις.
Όταν πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα A από τα δεξιά με τον πίνακα εναλλαγής P_{ij}, το αποτέλεσμα είναι η εναλλαγή των στηλών i και j του A.
Το γινόμενο πινάκων εναλλαγής ονομάζεται **πίνακας μετάθεσης**. Όταν πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα A από τα *αριστερά* με ένα πίνακα μετάθεσης, το αποτέλεσμα είναι μία μετάθεση των *γραμμών* του πίνακα A. Όταν πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα A από τα *δεξιά* με έναν πίνακα μετάθεσης, το αποτέλεσμα είναι μία μετάθεση των *στηλών* του A.

Δραστηριότητα 2.8 Πολλαπλασιάστε τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ από τα αριστερά με τον πίνακα $P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και από τα δεξιά με τον $P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Δραστηριότητα 2.9 Πολλαπλασιάστε τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ από τα δεξιά με τον πίνακα μετάθεσης $P_{23}\, P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Όλοι αυτοί οι πίνακες έχουν την ιδιότητα οτι μπορούμε να αναιρέσουμε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού με αυτούς, πολλαπλασιάζοντας πάλι με ένα πίνακα. Για παράδειγμα, πολλαπλασιαμός από τα αριστερά με το στοιχειώδη πίνακα $E_{ij}(\lambda)$ προσθέτει λ φορές την i γραμμή στη j γραμμή, και αναιρεί το αποτέλεσμα του $E_{ij}(-\lambda)$.

Ορισμός 2.8. Ενας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **αντιστρέψιμος** εάν υπάρχει ένας πίνακας B τέτοιος ώστε

$$BA = \mathbf{I} \quad \text{και} \quad AB = \mathbf{I}.$$

Ενας τέτοιος πίνακας B ονομάζεται **αντίστροφος** του A.

Θα δούμε αργότερα οτι αρκεί η μία από τις δύο συνθήκες. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε, (στο Κεφάλαιο ;;, Πρόταση ;;), την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.3 *Εάν A είναι τετραγωνικός πίνακας, τότε υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε $AB = \mathbf{I}$ εάν και μόνον εάν υπάρχει πίνακας C τέτοιος ώστε $CA = \mathbf{I}$.*

Από τον ορισμό του αντιστρόφου, εύκολα προκύπτει οτι εάν υπάρχει αντίστροφος πίνακας, αυτός είναι μοναδικός. Εάν A είναι αντιστρέψιμος, ο μοναδικός αντίστροφος πίνακας συμβολίζεται A^{-1}.

Πρόταση 2.4 *Εάν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο αντίστροφος πίνακας είναι μοναδικός.*

Απόδειξη. Εάν B και C είναι αντίστροφοι του A, τότε $AB = \mathbf{I} = CA$. Αρα

$$B = \mathbf{I}B = (CA)B = C(AB) = C\mathbf{I} = C\,.$$

□

Παράδειγμα 2.7 Ενας 1×1 πίνακας $A = [a]$ είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν $a \neq 0$, και ο αντίστροφος είναι $A^{-1} = [1/a]$.

Παράδειγμα 2.8 Ο 2×2 πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, και ο αντίστροφος πίνακας είναι $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$. Ελέγξτε οτι το γινόμενο των δύο πινάκων είναι ο ταυτοτικός 2×2 πίνακας.

Πρόταση 2.5 *Εάν A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, τότε η μοναδική λύση της εξίσωσης $Ax = b$ είναι η $x = A^{-1}b$.*

Η παραπάνω πρόταση μας λέει οτι εάν ο A είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει πάντα μοναδική λύση της $Ax = b$, για κάθε b. Όμως δεν χρειάζεται να βρούμε τον αντίστροφο για να υπολογίσουμε τη λύση. Ο συντομότερος τρόπος να βρούμε τη λύση είναι η απαλοιφή Gauss και η ανάδρομη αντικατάσταση, για την οποία απαιτούνται περίπου το ένα τρίτο των πράξεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό του αντιστρόφου.

Πρόταση 2.6 *Το γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων A και B είναι αντιστρέψιμος πίνακας, και*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,.$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε οτι $B^{-1}A^{-1}$ ικανοποιεί τις σχέσεις που ορίζουν τον αντίστροφο.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (A\mathbf{I})A^{-1} = AA^{-1} = \mathbf{I}\,,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\mathbf{I}B = B^{-1}B = \mathbf{I}\,.$$

□

Παράδειγμα 2.9 Εάν A, F, G είναι αντιστρέψιμοι και $GFEA = U$, τότε $F^{-1}G^{-1}UA^{-1} =$

$F^{-1}G^{-1}(GFEA)A^{-1} = E$.

Λήμμα 2.7 *Εάν B και C είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν ο BAC είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Προφανώς, εάν υπάρχει ο A^{-1}, τότε $(BAC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}B^{-1}$. Αντιστρόφως, εάν υπάρχει ο $(BAC)^{-1}$, ελέγχουμε οτι $C(BAC)^{-1}B$ είναι αντίστροφο του A:

$$A(C(BAC)^{-1}B) = (B^{-1}B)A(C(BAC)^{-1}B) = B^{-1}(BAC)(BAC)^{-1}B) = \mathbf{I}\,.$$

□

Λήμμα 2.8 *Ενας πίνακας με μια στήλη μηδενικών δεν είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Εάν ο πίνακας B έχει όλες τις συνιστώσες στη στήλη j μηδενικές, τότε για οποιονδήποτε πίνακα A, η στήλη j του AB έχει επίσης όλες τις συνιστώσες μηδενικές. Αρα $AB \neq \mathbf{I}$.

□

Άσκηση 2.16 Δείξτε οτι ένας 2×2 πίνακας $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν $ad - bc \neq 0$, και ο αντίστροφος είναι $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Άσκηση 2.17 Βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων, εάν υπάρχουν

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.18 Δείξτε οτι ένας διαγώνιος πίνακας είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο είναι διαφορετικά από το μηδέν. Ποιός είναι ο αντίστροφος;

Άσκηση 2.19 Εάν ο αντίστροφος του A^2 είναι B, δείξτε οτι ο αντίστροφος του A είναι AB. (Αυτό σημαίνει οτι ο A είναι αντιστρέψιμος όταν ο A^2 είναι αντιστρέψιμος).

Άσκηση 2.20 Βρείτε τρείς 2×2 πίνακες, διαφορετικούς από τους I και $-I$, οι οποίοι είναι ίσοι με τους αντιστρόφους τους, $A^2 = I$.

2.8 Ανάστροφοι πίνακες

Ορισμός 2.9. Εάν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας, ονομάζουμε **ανάστροφο** (transpose) του A, και συμβολίζουμε A^T τον $n \times m$ πίνακα του οποίου οι στήλες είναι οι γραμμές του A. Η συνιστώσα στη θέση ij του πίνακα A^T είναι ίση με τη συνιστώσα στη θέση ji του A: Εάν $A = [a_{kl}]$ και $A^T = [b_{ij}]$ τότε για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και κάθε $j = 1, \ldots, m$

$$b_{ij} = a_{ji}\,.$$

Παράδειγμα 2.10

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε τις ακόλουθες ιδιότητες του αναστρόφου.

Πρόταση 2.9 *Εάν A, B είναι $m \times n$ πίνακες, και C είναι $n \times p$ πίνακας, τότε*

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
3. $(AC)^T = C^T A^T$.
4. *Εάν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A^T είναι επίσης αντιστρέψιμος και* $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Δραστηριότητα 2.10 Αποδείξετε το 4: Ελέγξτε οτι ο πίνακας $(A^{-1})^T$ είναι ο αντίστροφος του A^T.

Ορισμός 2.10. Ενας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **συμμετρικός** εάν $A^T = A$, δηλαδή εάν $(A)_{ij} = (A)_{ji}$ για κάθε i, j. Ενας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **αντισυμμετρικός** εάν $A^T = -A$, δηλαδή εάν $(A)_{ij} = -(A)_{ji}$ για κάθε i, j.

Παράδειγμα 2.11 Εάν A είναι τετραγωνικός πίνακας, τότε $A + A^T$ είναι συμμετρικός και $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός.

Λήμμα 2.10 *Κάθε τετραγωνικός πίνακας A εκφράζεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα, με μοναδικό τρόπο. Συγκεκριμένα,*

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) .$$

Άσκηση 2.21 Βρείτε τον ανάστροφο των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} .$$

Άσκηση 2.22 Συμπληρώστε τα $*$ στους ακόλουθους πίνακες, έτσι ώστε να είναι συμμετρικοί:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ * & 6 & * \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} -3 & * & 8 & 9 \\ -4 & 7 & * & 7 \\ * & 2 & 6 & 4 \\ * & 7 & * & 9 \end{bmatrix} .$$

Άσκηση 2.23 Βρείτε A τέτοιο ώστε $(4A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 2.24 Δείξτε οτι εάν A και B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad , \quad (A^TB^T)^{-1} = (A^{-1}B^{-1})^T .$$

Άσκηση 2.25 Δίδονται πίνακες A σχήματος 4×1, B σχήματος 2×3, C σχήματος 2×4 και D σχήματος 1×3. Ποιοί από τους ακόλουθους πίνακες ορίζονται, και τί σχήμα έχουν;

α΄. ADB^T	β΄. $C^TB - 5AD$
γ΄. $4CA - (CA)^2$	δ΄. $(ADB^TC)^2 - I_4$

Άσκηση 2.26 Αποδείξτε οτι $(AB)^T = B^TA^T$. Ξεκινήστε από την πρώτη γραμμή του $(AB)^T$, η οποία είναι ίση με την πρώτη στήλη του AB, και δείξτε οτι αυτή είναι η πρώτη γραμμή του B^TA^T.

Άσκηση 2.27 Βρείτε τους αντιστρόφους των πινάκων μετάθεσης

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Εξηγήστε γιατί, για πίνακες μετάθεσης P, ισχύει πάντα $P^{-1} = P^T$: δείξτε οτι τα 1 βρίσκονται στη σωστή θέση ώστε να ισχύει $PP^T = I$

Άσκηση 2.28 Είναι τα ακόλουθα αληθή ή ψευδή; Δώστε αντιπαραδείγματα εάν είναι ψευδή και αποδείξεις εάν είναι αληθή.

1. Ένας 4×4 πίνακας με μία γραμμή μηδέν δεν είναι αντιστρέψιμος.
2. Ένας πίνακας με 1 στην κύρια διαγώνιο είναι αντιστρέψιμος.
3. Εάν A είναι αντιστρέψιμος, τότε A^{-1} είναι αντιστρέψιμος.
4. Εάν A^T είναι αντιστρέψιμος, τότε A είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 2.29 Δείξτε οτι υπάρχουν μη μηδενικοί πίνακες για τους οποίους $A^2 = 0$, αλλά οτι $A^T A = 0$ μόνο όταν $A = 0$.

Άσκηση 2.30 Υποθέστε οτι ο πίνακας R είναι $m \times n$ παραλληλόγραμμος, και ο A είναι $m \times m$ συμμετρικός.

1. Τι σχήμα έχει ο πίνακας $R^T AR$; Δείξτε οτι είναι συμμετρικός.
2. Δείξτε οτι ο $R^T R$ δεν έχει αρνητικές τιμές στη διαγώνιο.

Κεφάλαιο 3

Η απαλοιφή Gauss

3.1 Έκφραση της απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

Σε αυτή και την επόμενη παράγραφο θα εξετάσουμε πιο αναλυτικά τη διαδικασία απαλοιφής για την εξίσωση $Ax = b$ όταν A είναι τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε τη γενικότερη περίπτωση όπου A είναι $m \times n$ πίνακας.

Οπως είδαμε στο (2.9), το πρώτο βήμα της απαλοιφής στο σύστημα (2.4) περιγράφεται μέσω πολλαπλασιασμού του πίνακα συντελεστών με κατάλληλο στοιχειώδη πίνακα, από αριστερά.

Ας εφαρμόσουμε αυτή τη διαδικασία στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος 2.4,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

1. Αφαιρούμε 2 φορές την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη, δηλαδή πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με τον στοιχειώδη πίνακα $E_{21}(-2)$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

2. Αφαιρούμε -1 φορά την πρώτη γραμμή από την τρίτη, δηλαδή πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με τον στοιχειώδη πίνακα $E_{31}(1)$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(-\mathbf{1}) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

3. Αφαιρούμε -1 φορά τη δεύτερη γραμμή από την τρίτη, δηλαδή πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με τον στοιχειώδη πίνακα $E_{32}(1)$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(-\mathbf{1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Βλέπουμε οτι ο πολλαπλασιασμός του επαυξημένου πίνακα $[A\vdots b]$ από τα αριστερά, πρώτα με τον $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, κατόπιν με τον $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και τέλος με τον $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ έχει το ίδιο αποτέλεσμα με την απαλοιφή Gauss. Δηλαδή η απαλοιφή Gauss γίνεται

$$[A \vdots b] \to E[A \vdots b] \to F(E[A \vdots b]) \to G(FE[A \vdots b]).$$

Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα, καταλήγουμε οτι μπορούμε να εκφράσουμε την απαλοιφή ως πολλαπλασιασμό του πίνακα A και του διανύσματος b με το γινόμενο GFE. Το αρχικό σύστημα

$$Ax = b$$

γίνεται

$$GFEAx = GFEb.$$

Ορισμός 3.1. Ενας τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}]$ ονομάζεται **άνω τριγωνικός** εάν όλα τα στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο είναι ίσα με 0, δηλαδή εάν $a_{ij} = 0$ όταν $i > j$.
Ενας τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}]$ ονομάζεται **κάτω τριγωνικός** εάν όλα τα στοιχεία πάνω από τη διαγώνιο είναι ίσα με 0, δηλαδή εάν $a_{ij} = 0$ όταν $i < j$.

Παράδειγμα 3.1 Κάθε στοιχειώδης πίνακας είναι είτε άνω τριγωνικός είτε κάτω τριγωνικός, αφού έχει μόνο μία μη μηδενική συνιστώσα έξω από τη διαγώνιο.

Εάν γράψουμε $U = GFEA$ και $c = GFEb$, U είναι άνω τριγωνικός πίνακας, και έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$Ux = c$$

το οποίο λύνεται με ανάδρομη αντικατάσταση, και έχει ακριβώς το ίδιο σύνολο λύσεων με το αρχικό σύστημα.

Δραστηριότητα 3.1 Εξηγήστε σε κάποιο συμφοιτητή ή συμφοιτήτριά σας γιατί το σύστημα $Ux = c$ έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με το σύστημα $Ax = b$.

3.2 Παραγοντοποίηση *LU*

Μπορούμε να αναιρέσουμε τα βήματα της απαλοιφής, για να πάμε από τον πίνακα U στον A: πρέπει να αναιρέσουμε ένα–ένα βήμα, με την αντίστροφη σειρά. Είναι φανερό οτι για να αναιρέσουμε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού με τον G αρκεί να πολλαπλασιάσουμε με τον αντίστροφο του G, δηλαδη τον πίνακα που **προσθέτει** (-1) φορές τη δεύτερη γραμμή στην τρίτη,

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ανάλογα F^{-1} είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ που προσθέτει (-1) φορά την πρώτη γραμμή στην τρίτη, και E^{-1} είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ που προσθέτει 2 φορές την πρώτη γραμμή στη δεύτερη. Έχουμε

$$E^{-1}F^{-1}G^{-1}U = A.$$

Το γινόμενο $E^{-1}F^{-1}G^{-1}$ το συμβολίζουμε L. Εχουμε γράψει τον πίνακα A ως γινόμενο

$$A = LU.$$

Μπορούμε να εκτελέσουμε αυτή τη διαδικασία σε οποιοδήποτε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα, αρκεί οι συνιστώσες που εμφανίζονται στη διαγώνιο κατά την απαλοιφή να μην είναι μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση λέμε οτι *η διαδικασία απαλοιφής βρίσκει ένα πλήρες σύνολο οδηγών*.

Ορισμός 3.2. Λέμε οτι η διαδικασία απαλοιφής σε ένα $n \times n$ πίνακα A βρίσκει ένα **πλήρες σύστημα οδηγών**, όταν το πλήθος των οδηγών είναι n. (Υπενθυμίζουμε οτι, εξ ορισμού, οδηγός είναι μη μηδενικό στοιχείο). Αυτό σημαίνει οτι ο άνω τριγωνικός πίνακας στον οποίο καταλήγει η διαδικασία απαλοιφής έχει όλα τα διαγώνια στοιχεία διαφορετικά από το 0.

Δραστηριότητα 3.2 Υπολογίστε το γινόμενο $L = E^{-1}F^{-1}G^{-1}$.

Βλέπουμε οτι ο L στο παράδειγμα είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο και τους πολλαπλασιαστές κάτω από τη διαγώνιο. Θα δείξουμε οτι αυτό δεν είναι τυχαίο. Ο L είναι το γινόμενο $E^{-1}F^{-1}G^{-1}$ των πινάκων που αναιρούν τα βήματα της απαλοιφής. Ο G^{-1} είναι ο στοιχειώδης πίνακας $E_{32}(\lambda_{32})$, με τον πολλαπλασιαστή λ_{32} στη θέση 32. Ο F^{-1} είναι ο στοιχειώδης πίνακας $E_{31}(\lambda_{31})$, με τον αντίστοιχο πολλαπλασιαστή $\lambda_{31} = -1$ στη θέση 31. Άρα ο πολλαπλασιασμός του G^{-1} με τον F^{-1} από τα αριστερά, προσθέτει λ_{31} φορές την πρώτη γραμμή του E_{32} στην τρίτη γραμμή. Αλλά η πρώτη γραμμή είναι $[1\,0\,0]$, οπότε το αποτέλεσμα είναι απλώς να εμφανιστεί ο πολλαπλασιαστής λ_{31} στη θέση 31 του γινομένου:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρόμοια, πολλαπλασιασμός με τον πίνακα E^{-1}, τοποθετεί τον πολλαπλασιαστή λ_{21} στη θέση 21, χωρίς να αλλάξει τα άλλα στοιχεία του πίνακα.

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
L = E^{-1}F^{-1}G^{-1} &= E_{21}(\lambda_{21})E_{31}(\lambda_{31})E_{32}(\lambda_{32}) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Πρόταση 3.1 *Εάν στο $n \times n$ σύστημα $Ax = b$ η διαδικασία απαλοιφής βρίσκει ένα πλήρες σύνολο οδηγών χωρίς να χρειαστεί να κάνουμε εναλλαγές γραμμών, τότε ο πίνακας A γράφεται ως γινόμενο $A = LU$, όπου*

- *L είναι κάτω τριγωνικός, με 1 στη διαγώνιο, και τους πολλαπλασιαστές λ_{ij} κάτω από τη διαγώνιο.*
- *U είναι άνω τριγωνικός, με τους οδηγούς στη διαγώνιο.*

Η παραγοντοποίηση $A = LU$ έχει μεγάλη πρακτική σημασία. Δεν είναι απλά ένας τρόπος να παραστήσουμε την απαλοιφή. Η εξίσωση $Ax = b$ γίνεται

$$LUx = b.$$

Αλλά εάν γράψουμε $c = Ux$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την αρχική εξίσωση με τις δύο εξισώσεις

$$Lc = b, \quad Ux = c.$$

Έτσι για να λύσουμε την αρχική εξίσωση αρκεί να βρούμε το διάνυσμα c που ικανοποιεί την εξίσωση $Lc = b$ και κατόπιν το διάνυσμα x που ικανοποιεί την εξίσωση $Ux = c$. Το σημαντικό είναι οτι αυτά τα δύο συστήματα είναι τριγωνικά, και συνεπώς είναι εύκολο να τα λύσουμε. Στο παράδειγμα 2.4 η εξίσωση $Lc = b$ γίνεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$\begin{array}{rcrcrcr}
c_1 & & & & & = & 5 \\
2c_1 & + & c_2 & & & = & -2 \\
-c_1 & - & c_2 & + & c_3 & = & 9
\end{array}$$

απ' όπου έχουμε, με ευθεία αντικατάσταση, $c_1 = 5$, $c_2 = -12$, $c_3 = 2$.

Η εξίσωση $Ux = c$ τώρα γίνεται

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

την οποία λύνουμε με αναδρομή αντικατάσταση.

Η ευθεία και η ανάδρομη αντικατάσταση εξασφαλίζουν οτι αυτά τα συστήματα έχουν μοναδική λύση:

Πρόταση 3.2 *Εάν U είναι $n \times n$ άνω τριγωνικός πίνακας, του οποίου τα στοιχεία στη διαγώνιο είναι όλα διαφορετικά από το μηδέν, τότε κάθε σύστημα*

$$Ux = b$$

έχει μοναδική λύση. Το ίδιο ισχύει για κάτω τριγωνικό πίνακα του οποίου όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο είναι μη μηδενικά.

Εκτός από την παραγοντοποίηση $A = LU$, καμιά φορά χρησιμοποιούμε μια πιο συμμετρική παραγοντοποίηση: γράφουμε τον U ως γινόμενο ενός διαγώνιου πίνακα D με τους οδηγούς στη διαγώνιο, και ενός άνω τριγωνικού πίνακα U', με 1 στη διαγώνιο,

$$A = LDU'\,.$$

Ο U' αποτελείται από τις γραμμές του U διαιρεμένες με τον αντίστοιχο οδηγό:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρ' όλο που η σειρά με την οποία κάνουμε τα βήματα της απαλοιφής (χωρίς εναλλαγές) μπορεί να αλλάξει, το τελικό αποτέλεσμα LDU' είναι μοναδικό, όπως θα δείξετε στην Άσκηση 3.4.

Πρόταση 3.3 *Εάν A είναι συμμετρικός πίνακας, και $A = LDU'$, όπου L είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο, D είναι διαγώνιος και U' είναι άνω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο, τότε*

$$L^T = U'\,.$$

Απόδειξη. Εχουμε $LDU' = A = A^T = (LDU')^T = (U')^T D^T L^T$. Αλλά $(U')^T$ είναι κάτω τριγωνικός, D^T είναι διαγώνιος και L^T είναι άνω τριγωνικός, και από τη μοναδικότητα της παραγοντοποίησης $A = LDU'$, έχουμε $L^T = U'$, και $(U')^T = L$.

□

Άσκηση 3.1 Το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι πάλι κάτω τριγωνικός πίνακας (όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν). Εξακριβώστε οτι ισχύει με ένα παράδειγμα πινάκων 3×3, και κατόπιν εξηγήστε αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τη θεώρηση των γραμμών στον πολλαπλασιασμό πινάκων, Πρόταση 2.1.

Άσκηση 3.2 Εφαρμόστε απαλοιφή για να βρείτε τους παράγοντες L και U των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3.3 Λύστε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

αναλύοντάς την σε δύο τριγωνικές εξισώσεις, $Lc = b$ και $Ux = c$.

Άσκηση 3.4 Δείξτε οτι η παραγοντοποίηση $A = LDU'$ ενός πίνακα είναι μοναδική. (Υπόδειξη: Υποθέστε οτι $LDU' = \tilde{L}\tilde{D}\tilde{U}'$ και οτι L, $\tilde{L}$ είναι κάτω τριγωνικοί με 1 στη διαγώνιο, D, $\tilde{D}$ είναι διαγώνιοι πίνακες και U', $\tilde{U}'$ είναι άνω τριγωνικοί με 1 στη διαγώνιο. Δείξτε οτι τότε $L = \tilde{L}$, $D = \tilde{D}$ και $U' = \tilde{U}'$.)

Άσκηση 3.5 Υπολογίστε τα γινόμενα FGH και HGF (έχουμε παραλείψει τα μηδενικά πάνω από τη διαγώνιο):

$$F = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.6 Παραγοντοποιήστε τον πίνακα A σε γινόμενο LU, και γράψτε το άνω τριγωνικό σύστημα $Ux = c$ που προκύπτει μετά την απαλοιφή, για το σύστημα:

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.7 Βρείτε τους πίνακες E^2, E^8 και E^{-1} εάν

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3.8 Θεωρούμε τον άνω τριγωνικό πίνακα

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & a & b \\ 0 & d_2 & c \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

και υποθέτουμε οτι υπάρχει πίνακας V τέτοιος ώστε $VU = I$. Δείξτε οτι $d_1 d_2 d_3 \neq 0$ και οτι V είναι επίσης άνω τριγωνικός.

Άσκηση 3.9 Παραγοντοποιήστε τους ακόλουθους συμμετρικούς πίνακες στην μορφή $A = LDL^T$, όπου D είναι διαγώνιος και L κάτω τριγωνικός.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.3 Εναλλαγές γραμμών

Στο σύστημα εξισώσεων (2.6) χρειάστηκε να αλλάξουμε τη σειρά των εξισώσεων, για να βρούμε ένα πλήρες σύνολο οδηγών. Είδαμε οτι μπορούμε να παραστήσουμε τις εναλλαγές γραμμών με πολλαπλασιασμό από τα αριστερά με έναν πίνακα εναλλάγής, Ορισμός 2.7. Για παράδειγμα,

$$P_{23}\,A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Για έναν $n \times n$ πίνακα A υποθέτουμε οτι στη διαδικασία της απαλοιφής Gauss του A, χρειάζεται να κάνουμε διαδοχικά τις εναλλαγές γραμμών, που παριστάνονται από τους πίνακες $P_{i_1 j_1}$, $P_{i_2 j_2}$, $\ldots$, $P_{i_k j_k}$. Θεωρητικά θα μπορούσαμε να κάνουμε όλες τις εναλλαγές γραμμών στην αρχή, χρησιμοποιώντας το γινόμενο των πινάκων εναλλαγής $P = P_{i_k j_k} \ldots P_{i_1 j_1}$, (προσέξτε τη διάταξη των πινάκων στο γινόμενο), και κατόπιν να ξεκινήσουμε τη διαδικασία της απαλοιφής στον πίνακα PA. Θα αποδείξομε αυτό τον ισχυρισμό στο Θεώρημα 4.4, αλλά δείτε και την Άσκηση 3.11. Στον PA η διαδικασία απαλοιφής βρίσκει ένα πλήρες σύνολο οδηγών χωρίς να χρειαστεί να κάνουμε εναλλαγές γραμμών, και συνεπώς έχουμε παραγοντοποίηση

$$PA = LU\,.$$

Τώρα μπορούμε να δώσουμε έναν ορισμό του ιδιόμορφου πίνακα, και να ανακεφαλαιώσουμε τα μέχρι τώρα αποτελέσματα σε ένα Θεώρημα.

Ορισμός 3.3. Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A είναι **ιδιόμορφος** εάν η διαδικασία της απαλοιφής (με εναλλαγές γραμμών) καταλήγει σε ένα άνω τριγωνικό πίνακα με ένα ή περισσότερα μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο. Αντιθέτως, ο πίνακας A λέγεται **μη ιδιόμορφος** εάν η διαδικασία της απαλοιφής βρίσκει ένα πλήρες σύνολο οδηγών, δηλαδή εάν ο άνω τριγωνικός πίνακας U στον οποίο καταλήγει έχει όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο διαφορετικά από το 0.

Θεώρημα 3.4 *Εστω ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους*

$$Ax = b\,.$$

Τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα

1. *Εάν ο πίνακας A είναι ιδιόμορφος, τότε καμία αναδιάταξη των γραμμών δεν μπορεί να παραγάγει ένα πλήρες σύνολο οδηγών.*

2. *Εάν ο πίνακας A δεν είναι ιδιόμορφος, τότε υπάρχει ένας πίνακας μεταθέσεως P τέτοιος ώστε στη διαδικασία απαλοιφής του PA δεν εμφανίζονται μηδενικά στη θέση των οδηγών. Σε αυτή την περίπτωση*

   (α′) *Το σύστημα έχει μοναδική λύση, η οποία υπολογίζεται με τη διαδικασία απαλοιφής και ανάδρομης αντικατάστασης.*

   (β′) *Ο πίνακας PA παραγοντοποιείται ως γινόμενο*

   $$PA = LDU'$$

   όπου L είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο, D είναι διαγώνιος πίνακας με τους οδηγούς στη διαγώνιο, και U' είναι άνω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο. Η παραγοντοποίηση σε πίνακες με αυτές τις ιδιότητες είναι μοναδική.

Άσκηση 3.10 Λύστε τα ακόλουθα συστήματα με απαλοιφή, κάνοντας εναλλαγή γραμμών όπου αυτό είναι απαραίτητο:

$$\begin{array}{rcrcrcr} u & + & 4v & + & 2w & = & -2 \\ -2u & - & 8v & + & 3w & = & 32 \\ & & v & + & w & = & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rcrcrcr} & & v & + & w & = & 0 \\ u & + & v & & & = & 0 \\ u & + & v & + & w & = & 1 \end{array}$$

Βρείτε τους πίνακες μεταθέσεων που χρειάζονται.

Άσκηση 3.11 E είναι ο 3×3 πίνακας που αφαιρεί την πρώτη από την τρίτη γραμμή, και P ο πίνακας εναλλαγής που εναλλάσσει τη δεύτερη με την τρίτη γραμμή.

1. Βρείτε τους πίνακες E και P, και υπολογίστε τον πίνακα E' για τον οποίο $PE' = EP$.

2. Περιγράψτε τη δράση του πίνακα E'.

Άσκηση 3.12 Καταγράψετε τους 6 πίνακες μεταθέσεων 3×3, συμπεριλαμβανομένου του ταυτοτικού πίνακα I. Βρείτε τα αντίστροφα τους, τα οποία είναι επίσης πίνακες μεταθέσεως.

Άσκηση 3.13 Βρείτε τη λύση του ακόλουθου συστήματος, επιλύοντας τα δύο τριγωνικά συστήματα, χωρίς να υπολογίσετε το γινόμενο LU.

$$LUx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.14 Βρείτε τις παραγοντοποιήσεις $PA = LDU'$ για τους πίνακες

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.15 Θεωρήστε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ποιοί είναι οι στοιχειώδεις πίνακες E_{21} και E_{32} οι οποίοι φέρνουν τον πίνακα A σε άνω τριγωνική μορφή $E_{32}E_{21}A = U$;
Πολλαπλασιάστε με τους πίνακες E_{32}^{-1} και E_{21}^{-1} για να παραγοντοποιήσετε το A σε $LU = E_{21}^{-1}E_{32}^{-1}U$.

Άσκηση 3.16 Υπολογίστε τους παράγοντες L και U για το συμμετρικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τέσσερεις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα a, b, c, d για να έχει ο $A = LU$ τέσσερεις οδηγούς.

Άσκηση 3.17 Εάν ο πίνακας A έχει οδηγούς 2, 7 και 6, χωρίς εναλλαγές γραμμών, ποιοί είναι οι οδηγοί του 2×2 υποπίνακα B στην άνω αριστερή πλευρά; Εξηγήστε το συμπέρασμά σας.

Άσκηση 3.18 Ποιός πίνακας μεταθέσεως P κάνει τον PA άνω τριγωνικό; Ποιοί πίνακες μεταθέσεων P_1 και P_2 κάνουν τον P_1AP_2 κάτω τριγωνικό; Πολλαπλασιασμός με τον P_2 στα δεξιά μεταθέτει τις .... του A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.19 Εάν P_1 και P_2 είναι πίνακες μεταθέσεως, το ίδιο ισχύει για τον P_1P_2: δείξτε οτι αυτός περιέχει τις γραμμές του I σε κάποια διάταξη. Βρείτε παραδείγματα στα οποία $P_1P_2 \neq P_2P_1$ και $P_3P_4 = P_4P_3$.

3.4 Η διαδικασία Gauss - Jordan για την εύρεση του αντιστρόφου

Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο του πίνακα A θεωρούμε την εξίσωση $AA^{-1} = I$ στήλη προς στήλη: εάν x_j είναι η j στήλη του A^{-1}, και e_j η j στήλη του I, έχουμε

$$Ax_j = e_j\,, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Δηλαδή, για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο A^{-1} πρέπει να λύσουμε n συστήματα n εξισώσεων με n αγνώστους. Ομως ο πίνακας συντελεστών A είναι ο ίδιος και για τα n συστήματα. Αρα η απαλοιφή Gauss μπορεί να γίνει μία φορά, για όλα τα συστήματα. Για να καταγράψουμε αυτή τη διαδικασία φτιάχνουμε τον *επαυξημένο* πίνακα με τις στήλες του A και τις στήλες του I.

$$[A\,I] \quad = \quad [A\,e_1\,e_2\,e_3]$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{rrrrrr} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\to \left[\begin{array}{rrrrrr} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\to \left[\begin{array}{rrrrrr} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \\
&= [U\, L^{-1}]
\end{aligned}
$$

Αντί να προχωρήσουμε στην ανάδρομη αντικατάσταση με το συνήθη τρόπο, συνεχίζουμε την απαλοιφή των στοιχείων πάνω από τη διαγώνιο, ξεκινώντας από την τελευταία στήλη. Προσθέτουμε δύο φορές την τρίτη γραμμή στη δεύτερη γραμμή, και αφαιρούμε μία φορά την τρίτη γραμμή από την πρώτη γραμμή:

$$
[U\, L^{-1}] \to \left[\begin{array}{rrrrrr} 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].
$$

Προσθέτουμε 1/8 φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη γραμμή:

$$
\to \left[\begin{array}{rrrrrr} 2 & 0 & 0 & \frac{12}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{6}{8} \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].
$$

Τώρα στις τρείς στήλες στα αριστερά έχουμε ένα διαγώνιο πίνακα. Διαιρούμε με τους οδηγούς, για να πάρουμε τον ταυτοτικό πίνακα $\mathbf{I}$ στις τρεις στήλες στα αριστερά:

$$
\to \left[\begin{array}{rrrrrr} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{16} & -\frac{5}{16} & -\frac{6}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] = [I\, B]\ .
$$

Οι στήλες του B είναι ακριβώς οι λύσεις των εξισώσεων $Ax_j = e_j$, δηλαδή $AB = I$. Κοιτώντας το διαφορετικά, κάθε βήμα της διαδικασίας που ακολουθήσαμε αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό από τα αριστερά με ένα πίνακα $F_1, \ldots, F_k$. Από το αριστερό μέρος του επαυξημένου πίνακα έχουμε $F_k \ldots F_1\, A = I$, ενώ από το δεξί μέρος έχουμε $F_k \ldots F_1\, I = B$. Συνεπώς $A^{-1} = F_k \ldots F_1 = B$.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε ονομάζεται **απαλοιφή Gauss–Jordan**, και μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε μη ιδιόμορφο πίνακα. Η δυνατότητα εφαρμογής της διαδικασίας δείχνει οτι *κάθε μη ιδιόμορφος πίνακας είναι αντιστρέψιμος*. Θα δείξουμε και το αντίστροφο, *ένας ιδιόμορφος πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος*.

Αρχικά θεωρούμε έναν άνω τριγωνικό πίνακα.

Λήμμα 3.5 *Εάν ο άνω τριγωνικός πίνακας U έχει ένα μηδενικό στοιχείο στη διαγώνιο, τότε δεν είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι ο πίνακας U είναι άνω τριγωνικός και έχει ένα μηδενικό στοιχείο στη διαγώνιο, έστω το $u_{kk} = 0$. Αφαιρώντας πολλαπλάσιο της *στήλης* $k-1$ από τη στήλη k του U μπορούμε να μηδενίσουμε το στοιχείο $u_{(k-1)\,k}$. Στη συνέχεια, αφαιρώντας κατάλληλα πολλαπλάσια των στηλών $k-2$, $k-3$, …, 1 μπορούμε να μηδενίσουμε όλα τα στοιχεία $u_{(k-2)\,k}$, $u_{(k-3)\,k}$, …, $u_{1\,k}$, καταλήγοντας σε ένα πίνακα W στον οποίο όλα τα στοιχεία της στήλης k είναι μηδέν.

Υπενθυμίζουμε οτι η αφαίρεση ενός πολλαπλασίου της στήλης j ενός πίνακα από τη στήλη k, ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό από τα δεξιά με το στοιχειώδη πίνακα $E_{jk}(-\lambda)$. Εάν M είναι το γινόμενο αυτών των στοιχειωδών πινάκων, έχουμε

$$W = UM\,.$$

Γνωρίζουμε οτι οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι. Συνεπώς από την Πρόταση 2.6, ο πίνακας M είναι αντιστρέψιμος. Από το Λήμμα 2.7, ο πίνακας U είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν ο W είναι αντιστρέψιμος. Αλλά ο W έχει μία στήλη μηδενικών και από το Λήμμα 2.8 δεν είναι αντιστρέψιμος.

□

Εάν τώρα A είναι ένας ιδιόμορφος $n \times n$ πίνακας, τότε η διαδικασία της απαλοιφής Gauss καταλήγει με ένα άνω τριγωνικό πίνακα U, ο οποίος έχει τουλάχιστον ένα μηδενικό στοιχείο στη διαγώνιο, και

$$A = P^{-1}LU\,.$$

Αφού P και L είναι αντιστρέψιμοι και U δεν είναι αντιστρέψιμος, από το Λήμμα 2.7 καταλήγουμε οτι ο ιδιόμορφος πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Εχουμε αποδείξει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.6 *Ενας πίνακας είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν δεν είναι αντιστρέψιμος.*

Άσκηση 3.20 Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία Gauss–Jordan για να βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων, εάν υπάρχουν

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}\,, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\,, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3.21 Βρείτε τον αντίστροφο του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\,.$$

Άσκηση 3.22 Βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα στοιχεία των πινάκων A και B, ώστε αυτοί να είναι αντιστρέψιμοι.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.23 Εναλλάξτε τις γραμμές και συνεχίστε με την απαλοιφή Gauss-Jordan για να βρείτε τον πίνακα A^{-1}:

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3.24 Βρείτε x τέτοιο ώστε

1. $$\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. $$2\begin{bmatrix} 2x & x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.25 Μία ενδιαφέρουσα και κομψή εφαρμογή της διαδικασίας Gauss–Jordan είναι οτι ο αντίστροφος ενός μη ιδιόμορφου άνω τριγωνικού πίνακα είναι επίσης άνω τριγωνικός. Φανταστείτε οτι εκτελείτε τη διαδικασία, για να δείτε οτι ο αντίστροφος είναι άνω τριγωνικός.

Άσκηση 3.26 Δείξτε οτι εάν ένας πίνακας έχει δύο γραμμές ίσες, ή δύο στήλες ίσες, τότε δεν είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 3.27 Δώστε παραδείγματα πινάκων A και B τέτοιων ώστε

1. $A + B$ δεν είναι αντιστρέψιμος, αλλά A και B είναι.
2. $A + B$ είναι αντιστρέψιμος, αλλά A και B δεν είναι.
3. και οι τρείς πίνακες A, B, $A + B$ είναι αντιστρέψιμοι.

Στην τελευταία περίπτωση χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $A^{-1}(A+B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$, για να δείξετε οτι $C = B^{-1} + A^{-1}$ είναι επίσης αντιστρέψιμος, και να υπολογίσετε τον C^{-1}.

Άσκηση 3.28 Υποθέστε οτι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, και οτι εναλλάσσοντας τις δύο πρώτες γραμμές του A λαμβάνουμε τον πίνακα B. Είναι ο B αντιστρέψιμος; Πώς μπορούμε να πάρουμε τον B^{-1} από τον A^{-1};

Άσκηση 3.29 Εάν A και B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, δείξτε οτι $I - BA$ είναι αντιστρέψιμος εάν ο $I - AB$ είναι αντιστρέψιμος. Ξεκινήστε από την ταυτότητα $B(I - AB) = (I - BA)B$.

Κεφάλαιο 4

Πίνακες και Διανυσματικοί Υπόχωροι του $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$

4.1 Διανυσματικοί και αφινικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$

Θεωρούμε μία ευθεία ε στο επίπεδο E^2. Ως προς ένα σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{w})$ η ευθεία έχει εξίσωση της μορφής $Ax + By = C$. Τα διανύσματα συντεταγμένων των σημείων της ευθείας ε αποτελούν ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, $V = \{(x, y) : Ax + By = C\}$. Εξετάζουμε εάν οι πράξεις στο $\mathbb{R}^2$, η πρόσθεση διανυσμάτων και ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό ορίζονται στο υποσύνολο V, δηλαδή εάν το αποτέλεσμά τους είναι πάλι στοιχείο του V.

Παράδειγμα 4.1 Εάν $M = \{(x, y) : -3x + 2y = 6\}$, παρατηρούμε οτι τα διανύσματα $(-2, 0)$ και $(0, -3)$ ανήκουν στο M, αλλά το άθροισμά τους $(-2, 3)$ δεν ανήκει στο M. Ούτε το πολλαπλάσιο $2(2, 0)$ ανήκει στο M.

Παράδειγμα 4.2 Εάν $V = \{(x, y) : -3x + 2y = 0\}$, παρατηρούμε οτι εάν τα διανύσματα (x, y) και (u, v) ανήκουν στο V, τότε το άθροισμά τους $(x + u, y + v)$ επίσης ανήκει στο V: $-3(x+u)+2(y+v) = 0$. Λέμε οτι το σύνολο V είναι **κλειστό ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων** ενώ το σύνολο M δεν είναι. Παρόμοια, για κάθε πραγματικό αριθμό a το πολλαπλάσιο $a(x, y)$ ανήκει στο V. Λέμε οτι το σύνολο V είναι **κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό διανυσμάτων με αριθμό** ενώ το σύνολο M δεν είναι.

Παρόμοια στο χώρο E^3 με σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, οι συντεταγμένες των σημείων ενός επιπέδου Π αποτελούν ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ της μορφής $K = \{(x, y, z) : Ax + By + Cz = D\}$.

Δραστηριότητα 4.1 Δείξτε οτι το υποσύνολο N του $\mathbb{R}^3$, $N = \{(x, y, z) : 2x + y + z = -2\}$ δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^3$. Δείξτε επίσης οτι δεν είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό διανύσματος του $\mathbb{R}^3$ με πραγματικό αριθμό.

Δραστηριότητα 4.2 Δείξτε οτι το υποσύνολο W του $\mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) : 2x+y+z = 0\}$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^3$ και ως προς τον πολλαπλασιασμό διανύσματος του $\mathbb{R}^3$ με πραγματικό αριθμό.

Ορισμός 4.1. Ενα υποσύνολο V του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **διανυσματικός υπόχωρος (ή γραμμικός υπόχωρος)** του $\mathbb{R}^n$ εάν

1. V δεν είναι κενό, $V \neq \varnothing$.
2. V είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση: εάν $v, w \in V$ τότε $v + w \in V$.
3. V είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με αριθμό: εάν $v \in V$ και $a \in \mathbb{R}$, τότε $av \in V$.

Τα 2 και 3 μαζί, σημαίνουν οτι οι γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων του V παραμένουν μέσα στο V.

Λήμμα 4.1 *Εάν V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, τότε το μηδενικό διάνυσμα $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ ανήκει στο V.*

Πράγματι, αφού V δεν είναι κενό, υπάρχει κάποιο $v \in V$ και $0 = v + (-1)v \in V$.
Το σύνολο $\{(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 4.3 Στο $\mathbb{R}^3$, διανυσματικοί υπόχωροι είναι

1. Όλος ο χώρος $\mathbb{R}^3$,
2. Το μονοσύνολο $\{0 \in \mathbb{R}^3\}$,
3. Το σύνολο συντεταγμένων των σημείων ενός επιπέδου που περιέχει το σημείο αναφοράς O, δηλαδή κάθε υποσύνολο της μορφής $\{(x, y, z) : Ax + By + Cz = 0\}$,
4. Το σύνολο συντεταγμένων των σημείων μίας ευθείας που περιέχει το σημείο αναφοράς O, δηλαδή κάθε υποσύνολο της μορφής $\{(x, y, z) : A_1x+B_1y+C_1z = 0,\ A_2x+B_2y+C_2z = 0\}$.

Δραστηριότητα 4.3 Ποιά υποσύνολα είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}$;
Ποιά υποσύνολα είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$;

Λήμμα 4.2 *Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, το σύνολο $V = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος.*
Εάν $v_1, \ldots, v_n$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^m$, το σύνολο W όλων των γραμμικών συνδυασμών των $v_1, \ldots, v_n$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη. Το μηδενικό διάνυσμα ανήκει στο V, άρα το V δεν είναι κενό. Εάν $v, w \in V$, τότε $A(v+w) = Av + Aw = 0$ και για κάθε $a \in \mathbb{R}$, $A(av) = 0$. Συνεπώς V είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.

Το μηδενικό διάνυσμα ανήκει στο W, άρα το W δεν είναι κενό. Εάν $y = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$, $z = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$ και $c \in \mathbb{R}$, τότε $y+z$ και cy εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των $v_1, \ldots, v_n$, άρα W είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.

$\square$

Δραστηριότητα 4.4 Ποιά από τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι διανυσματικοί υπόχωροι; Ποιά είναι ίσα μεταξύ τους;

1. Οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $(1, 0, 0)$ και $(0, 0, 1)$.

2. Οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $(1, 0, 1)$ και $(0, 0, 1)$.

3. Το σύνολο $\{(x, y, z) : y = 0\}$.

Τι συμβαίνει με επίπεδα που δεν περιέχουν το σημείο αναφοράς O; Στη Δραστηριότητα 4.1 είδαμε οτι το σύνολο των συντεταγμένων των σημείων ενός τέτοιου επιπέδου δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος. Θεωρούμε επίπεδο Π στον E^3, του οποίου το σύνολο συντεταγμένων ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ είναι το υποσύνολο $N = \{(x, y, z) : 2x+y+z = -2\}$ του $\mathbb{R}^3$. Επιλέγουμε ένα σημείο A του Π, με συντεταγμένες (x_0, y_0, z_0). Τότε για κάθε σημείο $B : (x, y, z)$ του Π, το διάνυσμα $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ έχει συντεταγμένες $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, οι οποίες ανήκουν στο διανυσματικό υπόχωρο W. Συμπεραίνουμε οτι κάθε στοιχείο $(x, y, z) \in N$ γράφεται ως άθροισμα $(x_0, y_0, z_0) + (r, s, t)$, όπου $(r, s, t) \in W$. Λέμε οτι N είναι ο αφινικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει το (x_0, y_0, z_0) και είναι παράλληλος προς το διανυσματικό υπόχωρο W.

Ορισμός 4.2. Ένα υποσύνολο M του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **αφινικός υπόχωρος** του $\mathbb{R}^n$ εάν υπάρχει ένας διανυσματικός υπόχωρος W του $\mathbb{R}^n$ και ένα διάνυσμα $v \in M$, τέτοια ώστε $u \in M$ εάν και μόνον εάν $u - v$ ανήκει στο W.

Παράδειγμα 4.4 Οποιοδήποτε μονοσύνολο $\{v\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι αφινικός υπόχωρος.
Κάθε δύο στοιχεία v και w του $\mathbb{R}^n$ ορίζουν έναν αφινικό υπόχωρο (μία ευθεία στο $\mathbb{R}^n$): το υποσύνολο που περιέχει το v και κάθε διάνυσμα της μορφής $v + t(w-v)$ για $t \in \mathbb{R}$.

Δραστηριότητα 4.5 Ποιά από τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι αφινικοί υπόχωροι; Ποιά είναι ίσα μεταξύ τους;

1. Το σύνολο $\{(x, y, z) : x + z - 2 = 0\}$.

2. Το σύνολο $\{(x, y, z) = (1+s, t, 1-s), s, t \in \mathbb{R}\}$.

3. Το σύνολο $\{(x, y, z) = (1-s, 0, 1+s), s \in \mathbb{R}\}$.

Λήμμα 4.3 *Εάν* A *είναι* $m \times n$ *πίνακας και* $v \in \mathbb{R}^n$, *τότε το σύνολο* $M = \{y \in \mathbb{R}^n : A(y-v) = 0\}$ *είναι αφινικός υπόχωρος.*

Απόδειξη. Το διάνυσμα y ανήκει στο M εάν και μόνον εάν $y - v$ ανήκει στο σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$, το οποίο είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

□

4.2 Χώρος στηλών και μηδενόχωρος

Θα μελετήσουμε ορισμένους διανυσματικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^m$ και του $\mathbb{R}^n$ που συνδέονται με ένα σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους, ή με ένα $m \times n$ πίνακα.

Παράδειγμα 4.5 Θεωρούμε το σύστημα $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Πότε έχει το σύστημα λύση; Εάν υπάρχει λύση, έστω (u_0, v_0), τότε το διάνυσμα (b_1, b_2, b_3) γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = u_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + v_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Αντίστροφα, εάν το διάνυσμα μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A, τότε οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού αποτελούν μια λύση του συστήματος. Συνεπώς το σύστημα έχει λύση εάν και μόνον εάν το διάνυσμα b μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A. Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των στηλών του A είναι το σύνολο $V = \{\lambda_1(1, 5, 2) + \lambda_2(0, 4, 4) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$. Από το Λήμμα 4.2, το σύνολο V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

> **Δραστηριότητα 4.6** Γράψτε το διάνυσμα (1, 0, 1) ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων (1, 0, 0), (0, 1, 1) και (0, 1, 0).

Ορισμός 4.3. Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των στηλών του $m \times n$ πίνακα A ονομάζεται **χώρος στηλών** του A, και συμβολίζεται $\mathcal{R}(A)$.

Από το Λήμμα 4.2, $\mathcal{R}(A)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

Παρατηρούμε οτι $b \in \mathcal{R}(A)$ εάν και μόνον εάν το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση. Πράγματι οι συνιστώσες του διανύσματος x είναι ακριβώς οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού των στηλών του A που δίδει το b.

Δραστηριότητα 4.7 Γράψτε το γραμμικό συνδυασμό που βρήκατε στη Δραστηριότητα 4.6 στη μορφή $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ο μικρότερος δυνατός χώρος στηλών είναι ο μηδενικός υπόχωρος, που αποτελείται μόνο από το μηδενικό διάνυσμα στο $\mathbb{R}^m$: αυτός είναι ο χώρος στηλών του μηδενικού πίνακα $A = 0$. Στο άλλο άκρο, ο χώρος στηλών του ταυτοτικού $m \times m$ πίνακα είναι όλος ο χώρος $\mathbb{R}^m$: κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών $e_1, e_2, \ldots, e_m$ του I:

$$(b_1, b_2, \ldots, b_m) = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \cdots + b_m e_m\,.$$

Το ίδιο ισχύει για κάθε μη ιδιόμορφο $m \times m$ πίνακα A. Ο χώρος στηλών του A περιέχει όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^m$: η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύση για κάθε διάνυσμα $b \in R^m$.

Ορισμός 4.4. Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $Ax = 0$ ονομάζεται **μηδενόχωρος** του A, και συμβολίζεται $\mathcal{N}(A)$.

Από το Λήμμα 4.2 γνωρίζουμε επίσης οτι ο μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Στην εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

η μόνη λύση είναι $(u, v) = (0, 0)$. Αρα $\mathcal{N}(A) = \{0 \in \mathbb{R}^2\}$.

Στον πίνακα $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, η τρίτη στήλη είναι το άθροισμα των άλλων δύο. Αρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ο γραμμικός συνδυασμός

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Δηλαδή κάθε πολλαπλάσιο του $(1, 1, -1)$ είναι λύση του $Bx = 0$, και ο μηδενόχωρος $\mathcal{N}(B)$ περιέχει τον υπόχωρο $\{\lambda(1, 1, -1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Θα δούμε οτι σε αυτό το παράδειγμα οι δύο υπόχωροι είναι ίσοι.

Άσκηση 4.1 Ελέγξτε εάν τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις αποτελούν διανυσματικούς υπόχωρους ή όχι.

α'. $3x + y = 0$ β'. $3(x + 2) = 5y$

γ'. $3(x + 2) - 5y = 6$ δ'. $x^2 + y^2 = 0$

Άσκηση 4.2 Εάν προσθέσουμε μία επιπλέον στήλη b στον πίνακα A, τότε ο χώρος στηλών γίνεται μεγαλύτερος, εκτός εάν .... Δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο ο χώρος στηλών μεγαλώνει και ένα στο οποίο παραμένει ο ίδιος. Γιατί η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύση ακριβώς όταν ο χώρος στηλών δεν μεγαλώνει όταν συμπεριλάβουμε το διάνυσμα b;

Άσκηση 4.3 Οι στήλες του AB είναι γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του A. Αυτό σημαίνει οτι ο χώρος στηλών του AB περιέχεται στον (ή είναι ίσος με τον) χώρο στηλών του A. Δώστε ένα παράδειγμα όπου οι χώροι στηλών του A και του AB δεν είναι ίσοι.

Άσκηση 4.4 Είναι τα ακόλουθα αληθή ή ψευδή; Δώστε αντιπαράδειγμα εάν είναι ψευδή και αιτιολόγηση εάν είναι αληθή.

1. Τα διανύσματα b που δεν περιέχονται στο χώρο στηλών $\mathcal{R}(A)$ αποτελούν διανυσματικό υπόχωρο.
2. Εάν $\mathcal{R}(A)$ περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, τότε A είναι ο μηδενικός πίνακας.
3. Ο χώρος στηλών του πίνακα $2A$ είναι ίσος με το χώρο στηλών του A.
4. Ο χώρος στηλών των $A - I$ είναι ίσος με το χώρο στηλών του A.

Άσκηση 4.5 Για ποιά διανύσματα (b_1, b_2, b_3) έχουν τα ακόλουθα συστήματα λύση;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 4.6 Κατασκευάστε έναν 3×3 πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών περιέχει τα διανύσματα $(1, 1, 0)$ και $(1, 0, 1)$, αλλά δεν περιέχει το $(1, 1, 1)$. Κατασκευάστε έναν 3×3 πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών είναι μία ευθεία.

Άσκηση 4.7 Εάν A είναι πίνακας 9×12 και το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για κάθε b, τότε $\mathcal{R}(A) = \ldots$.

Άσκηση 4.8 Βρείτε το χώρο στηλών και το μηδενόχωρο του πίνακα $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 4.9 Δείξτε οτι εάν A είναι αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας, τότε $\mathcal{N}(A) = \{0 \in \mathbb{R}^n\}$.

4.3 Απαλοιφή σε σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους

Η περίπτωση συστημάτων m εξισώσεων με n αγνώστους για $m \neq n$, λύνεται πάλι με απαλοιφή, εμφανίζονται όμως περισσότερες δυνατότητες. Στην αρχή εξετάζουμε, με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, τη διαδικασία της απαλοιφής σε ένα 3×4 πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Στην πρώτη γραμμή έχουμε μη μηδενικό στοιχείο στην πρώτη στήλη, το οποίο χρησιμοποιούμε ως οδηγό. Αφαιρούμε δύο φορές την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη, και προσθέτουμε την πρώτη γραμμή στην τρίτη:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Στη δεύτερη στήλη δεν υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο κάτω από την πρώτη γραμμή, άρα δεν μπορούμε να βρούμε οδηγό με εναλλαγή γραμμών. Συνεχίζουμε στην τρίτη στήλη, όπου υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο στη δεύτερη γραμμή, ο δεύτερος οδηγός. Αφαιρούμε δύο φορές τη δεύτερη γραμμή από την τρίτη:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Στην τέταρτη στήλη δεν υπάρχει οδηγός. Στη γενική περίπτωση μπορεί να χρειάζεται να κάνουμε εναλλαγή γραμμών για να φέρουμε ένα μη μηδενικό στοιχείο στη θέση του οδηγού. Καταλήγουμε σε ένα πίνακα στην ακόλουθη μορφή, η οποία ονομάζεται κλιμακωτή.

- Οι γραμμές που έχουν κάποια μή μηδενικά στοιχεία (εάν υπάρχουν) εμφανίζονται πάνω από τις γραμμές που έχουν μόνο μηδενικά στοιχεία (εάν υπάρχουν).

- Το πρώτο μή μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής (εάν υπάρχει) ονομάζεται **οδηγός**. Ο οδηγός κάθε μη μηδενικής γραμμής βρίσκεται στα δεξιά του οδηγού της προηγούμενης γραμμής.

Συμπεραίνουμε οτι στα αριστερά και κάτω από κάθε οδηγό υπάρχουν μόνο μηδενικά. Εάν καταγράψουμε τα αντίστροφα των βημάτων της απαλοιφής, παίρνουμε έναν κάτω τριγωνικό $m \times m$ πίνακα. Στο παράδειγμα έχουμε, για τον αντίστροφο του πρώτου βήματος της απαλοιφής

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ενώ για τον αντίστροφο του δεύτερου βήματος

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αρα $A = E^{-1}F^{-1}U = LU$, όπου

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αυτή η περιγραφή περιλαμβάνει και την περίπτωση τετραγωνικού πίνακα, καθώς η άνω τριγωνική μορφή που παίρνουμε από την απαλοιφή ενός τετραγωνικού πίνακα είναι ειδική περίπτωση της κλιμακωτής μορφής. Συνεπώς το επόμενο Θεώρημα, του οποίου θα δώσουμε πιό προσεκτική απόδειξη, περιλαμβάνει και τα προηγούμενα αποτελέσματα.

Θεώρημα 4.4 *Σε κάθε $m \times n$ πίνακα A αντιστοιχεί*

1. *ένας $m \times m$ πίνακας μεταθέσεων P,*

2. *ένας $m \times m$ κάτω τριγωνικός πίνακας L, με 1 στη διαγώνιο, και*

3. *ένας $m \times n$ πίνακας σε κλιμακωτή μορφή U*

τέτοιοι ώστε

$$PA = LU\,.$$

Δραστηριότητα 4.8 Δίδεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Με ποιόν πίνακα εναλλαγής P_1 μπορείτε να πολλαπλασιάσετε τον A έτσι ώστε ο P_1A να παραγοντοποιείται σε L_1U_1;

2. Με ποιόν άλλο πίνακα εναλλαγής P_2 μπορείτε να πολλαπλασιάσετε τον A έτσι ώστε ο P_2A να παραγοντοποιείται σε L_2U_2;

3. Είναι $L_1 = L_2$; Είναι $U_1 = U_2$;

Πριν δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος πρέπει να ορίσουμε με κατάλληλο τρόπο ένα γενικό πίνακα σε κλιμακωτή μορφή. Δίνουμε πρώτα έναν ορισμό όπου επικεντρώνουμε την προσοχή μας στις γραμμές του πίνακα. Στον ακόλουθο ορισμό δίνουμε σε παρένθεση τη διαισθητική ερμηνεία των αριθμών r και j_i.

Ορισμός 4.5. Ενας $m \times n$ πίνακας $U = [a_{ij}]$ είναι σε **κλιμακωτή μορφή** εάν υπάρχει ένας ακέραιος r (ο αριθμός των μη μηδενικών γραμμών του πίνακα), με $0 \leq r \leq m$, και για κάθε $i = 1, \ldots, r$ υπάρχουν ακέραιοι $j_i \leq n$ (η θέση του πρώτου μη μηδενικού στοιχείου της γραμμής i) τέτοιοι ώστε

1. $a_{ij_i} \neq 0$, και ονομάζεται **οδηγός** στη γραμμή i και στη στήλη j_i.
2. $j_1 \geq 1$, και για κάθε $i = 1, \ldots, r-1$, $j_{i+1} > j_i$. (Κάθε οδηγός βρίσκεται στα δεξιά του προηγούμενου).
3. Για κάθε $i = 1, \ldots, r$, $a_{ik} = 0$ για $k < j_i$. (Ο οδηγός είναι το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της γραμμής).
4. Για $i > r$, $a_{ik} = 0$ για κάθε k. (Υπάρχουν μόνον r μη μηδενικές γραμμές).

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2j_2} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{rj_r} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Η διαδικασία της απαλοιφής προχωρά στήλη–στήλη, άρα χρειαζόμαστε μια περιγραφή της κλιμακωτής μορφής κατά στήλες. Εξετάστε προσεκτικά τις δύο περιγραφές και βεβαιωθείτε οτι σε κάθε περίπτωση περιγράφουν την ίδια μορφή.

Εάν $U = [a_{ij}]$ είναι $m \times n$ πίνακας σε κλιμακωτή μορφή, τότε υπάρχει $r \leq m$ και για κάθε $j = 1, \ldots, n$ υπάρχουν ακέραιοι i_j (η θέση του τελευταίου μη μηδενικού στοιχείου της στήλης j) με $i_j \leq r$, τέτοιοι ώστε

1. $0 \leq i_1 \leq 1$ και για κάθε $j = 1, \ldots, n-1$, $i_j \leq i_{j+1} \leq i_j + 1$.
2. $a_{ij} = 0$ για $i > i_j$, και εάν $i_j > i_{j-1}$ τότε $a_{i_j j} \neq 0$.

Ο αριθμός i_j μετράει πόσοι οδηγοί υπάρχουν στις στήλες από 1 έως j.

Σε πρώτη ανάγνωση μπορείτε να παραλείψετε αυτή την απόδειξη, και να επανέλθετε σε αυτήν αργότερα.

Απόδειξη. Πρώτα περιγράφουμε αναδρομικά τη διαδικασία της απαλοιφής, χρησιμοποιώντας τους αριθμούς i_j. Θέτουμε $i_0 = 0$, $U_0 = A$ και υποθέτουμε οτι για k με $n > k \geq 0$ έχουμε πίνακα U_k (τον πίνακα που προκύπτει από τον A μετά την απαλοιφή στις k πρώτες στήλες) και ακεραίους $i_0, \ldots, i_k$ οι οποίοι ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες. Θεωρούμε τη στήλη $k+1$ του πίνακα U_k και κατασκευάζουμε τον πίνακα U_{k+1} και τον ακέραιο i_{k+1} με τον ακόλουθο τρόπο.

- Εάν $a_{i(k+1)} = 0$ για κάθε i με $m \geq i > i_k$, τότε δεν χρειάζεται να αλλάξουμε τη στήλη $k+1$ για να πάρουμε τον πίνακα U_{k+1}. Θέτουμε $i_{k+1} = i_k$ και $U_{k+1} = U_k$.
- Διαφορετικά, βρίσκουμε το μικρότερο i για το οποίο $i > i_k$ και $a_{i(k+1)} \neq 0$. Για αυτό το i, εναλλάσσουμε τις γραμμές $i_k + 1$ και i του πίνακα U_k, δηλαδή πολλαπλασιάζουμε τον U_k από τα αριστερά με τον πίνακα $P_{(i_k+1)i}$. Με αυτή την εναλλαγή φέρνουμε ένα μη μηδενικό στοιχείο στη θέση του οδηγού στη στήλη $k+1$. Αριθμούμε ξανά τις γραμμές του νέου πίνακα, και συμβολίζουμε τα στοιχεία του με a_{ij}. Για κάθε ℓ με $m \geq \ell > i_k + 1$, πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με το στοιχειώδη πίνακα που αφαιρεί $\frac{a_{\ell(k+1)}}{a_{(i_k+1)(k+1)}}$ φορές τη γραμμή $i_k + 1$ από τη γραμμή ℓ. Με αυτόν τον τρόπο μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία της στήλης $k+1$ που βρίσκονται κάτω από τον οδηγό $a_{(i_k+1)(k+1)}$. Τέλος θέτουμε $i_{k+1} = i_k + 1$ και U_{k+1} ίσο με το τελικό γινόμενο.

Οταν εξαντλήσουμε όλες τις στήλες, καταλήγουμε με τον πίνακα $U = U_n$, ο οποίος είναι σε κλιμακωτή μορφή.

Εάν συμβολίσουμε $P_1, \ldots, P_r$ τους πίνακες εναλλαγής που χρησιμοποιούμε στα r μη τετριμμένα βήματα της διαδικασίας απαλοιφής, και $L_1, \ldots, L_r$ τους αντίστοιχους κάτω τριγωνικούς πίνακες, έχουμε

$$U = L_r P_r L_{r-1} P_{r-1} \cdots L_1 P_1 A\,.$$

Για να καταλήξουμε στη παραγοντοποίηση $LU = PA$, όπου L είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο και P είναι πίνακας μεταθέσεως, πρέπει να *περάσουμε όλους τους κάτω τριγωνικούς πίνακες L_i στα αριστερά των πινάκων εναλλαγής P_i*. Γνωρίζουμε οτι, εν γένει,

$$L_r P_r L_{r-1} P_{r-1} \cdots L_1 P_1 \neq L_r L_{r-1} \cdots L_1 P_r P_{r-1} \ldots P_1\,.$$

Όμως θα δείξουμε οτι υπάρχει κάτω τριγωνικός πίνακας K, με 1 στη διαγώνιο, τέτοιος ώστε

$$L_r P_r L_{r-1} P_{r-1} \cdots L_1 P_1 = K\, P_r \cdots P_1\,.$$

Θέτουμε $K_r = L_r$, και για κάθε $i = 1, \ldots, r-1$ ορίζουμε τον πίνακα K_i από τη σχέση

$$(P_r P_{r-1} \cdots P_{i+1}) L_i = K_i (P_r P_{r-1} \cdots P_{i+1})\,. \tag{4.2}$$

Δραστηριότητα 4.9 Γιατί γνωρίζετε οτι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας K_i που ικανοποιεί τη σχέση 4.2;

Στον ακόλουθο υπολογισμό, έχουμε σημειώσει με αγκύλη τους όρους που θα αντικαταστήσουμε στο επόμενο βήμα, και έχουμε υπογραμμίσει τους όρους με τους οποίους τους αντικαταστήσαμε χρησιμοποιώντας την 4.2.

$$\begin{aligned}
\overbrace{L_r}\, P_r L_{r-1} P_{r-1} \cdots L_1 P_1 &= \underline{K_r}\, \overbrace{P_r L_{r-1}}\, P_{r-1} \cdots L_1 P_1 \\
&= K_r \underline{K_{r-1}}\, \overbrace{\underline{P_r} P_{r-1} L_{r-2}} \cdots L_1 P_1 \\
&= \ldots \\
&= K_r K_{r-1} \cdots K_3 \underline{K_2}\, \overbrace{\underline{P_r P_{r-1} \cdots P_3} P_2 L_1}\, P_1 \\
&= K_r K_{r-1} \cdots K_2 \underline{K_1 P_r P_{r-1} \cdots P_2} P_1\,.
\end{aligned}$$

Απομένει να δείξουμε οτι $K = K_r \cdots K_1$ είναι επίσης κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο. Παρατηρούμε οτι ο L_i αφαιρεί πολλαπλάσια της i γραμμής από τις πιο κάτω γραμμές, δηλαδή είναι της μορφής

$$L_i = \begin{bmatrix} I_i & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ B & \vdots & I_{m-i} \end{bmatrix}$$

ενώ $P_r \cdots P_{i+1}$ είναι μια μετάθεση R των γραμμών $i+1, \ldots, m$, άρα

$$P_r \cdots P_{i+1} = \begin{bmatrix} I_i & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & R \end{bmatrix}$$

και

$$(P_r \cdots P_{i+1})^{-1} = P_{i+1} \cdots P_r = \begin{bmatrix} I_i & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & R^{-1} \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε το γινόμενο $K_i = (P_r \cdots P_{i+1}) L_i (P_r \cdots P_{i+1})^{-1}$ πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες σε μπλοκ, και έχουμε

$$\begin{aligned} K_i &= \begin{bmatrix} I_i & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_i & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ B & \vdots & I_{m-i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_i & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & R^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_i & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ RB & \vdots & I_{m-i} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ο οποίος είναι κάτω τριγωνικός πίνακας, με 1 στη διαγώνιο. Συμπεραίνουμε οτι ο πίνακας $K = K_r \cdots K_1$ είναι επίσης κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο.

□

Άσκηση 4.10 Δείξτε οτι εάν A και B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε ο πίνακας

$$C = \begin{bmatrix} A & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & B^{-1} \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 4.11 Δίδονται οι πίνακες

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε τα γινόμενα $P_1 L P_1^{-1}$ και $P_2 L P_2^{-1}$. Είναι αυτά τα γινόμενα κάτω τριγωνικοί πίνακες; Εξηγήστε τα αποτελέσματά σας.

Άσκηση 4.12 Βρείτε τον κλιμακωτό πίνακα U, και τους πίνακες P και L έτσι ώστε $PA = LU$, για τους ακόλουθους πίνακες:

1. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

2. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

3. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

4. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

4.4 Οι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης

Για να βρούμε τις λύσεις του συστήματος m εξισώσεων με n αγνώστους, εξετάζουμε πρώτα την **ομογενή** περίπτωση: όταν στη δεξιά πλευρά έχουμε το μηδενικό διάνυσμα.

$$Ax = 0\,.$$

Από το Θεώρημα έχουμε $A = (P^{-1}L)U$, και εφόσον $P^{-1}L$ είναι αντιστρέψιμος, $Ax = 0$ εάν και μόνον εάν $Ux = (P^{-1}L)^{-1}0$, δηλαδή εάν και μόνον εάν

$$Ux = 0\,.$$

Αυτό το σύστημα έχει πάντα μία τουλάχιστον λύση, την $x = 0$. Μας ενδιαφέρει να δούμε εάν έχει και άλλες λύσεις.

> **Δραστηριότητα 4.10** Εάν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, βρείτε μία μη μηδενική λύση της εξίσωσης $Ax = 0$, όπου $x = (u, v, w, y)$. Βρείτε άλλη μία μη μηδενική λύση, που δεν είναι πολλαπλάσιο της πρώτης.

Στο παράδειγμα 4.1, είχαμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ v \\ \mathbf{w} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε σημειώσει με παχειά γράμματα τους οδηγούς και τις μεταβλητές u και w που αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγούς. Λύνουμε με ανάδρομη αντικατάσταση:

- από τη δεύτερη γραμμή $3w + y = 0$, και συνεπώς $w = -\frac{1}{3}y$.
- αντικαθιστώντας το w στην πρώτη γραμμή έχουμε $u + 3v - y + 2y = 0$, και συνεπώς $u = -3v - y$.

Δηλαδή μπορούμε να δώσουμε οποιαδήποτε τιμή στις μεταβλητές v και y, οι οποίες αντιστοιχούν σε στήλες που δεν έχουν οδηγούς, και να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες τιμές των μεταβλητών u και w. Η γενική λύση είναι

$$\left(-3v - y,\, v,\, -\tfrac{1}{3}y,\, y\right).$$

Είναι χρήσιμο, αν και κάπως αυθαίρετο, να διακρίνουμε τις μεταβλητές σε αυτές που αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγούς, τις οποίες ονομάζουμε **βασικές μεταβλητές**, και στις υπόλοιπες, που αντιστοιχούν σε στήλες χωρίς οδηγούς, τις οποίες ονομάζουμε **ελεύθερες μεταβλητές**.

> **Δραστηριότητα 4.11** Ποιές είναι οι βασικές και ποιές οι ελεύθερες μεταβλητές στην εξίσωση $Ax = 0$, για τον πίνακα A της Δραστηριότητας 4.10.

Στο παράδειγμα 4.1, οι ελεύθερες μεταβλητές είναι οι v και y, και η λύση μπορεί να γραφεί

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Παρατηρούμε οτι κάθε διάνυσμα που γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $(-3, 1, 0, 0)$ και $(-1, 0, -\frac{1}{3}, 1)$ ανήκει στο μηδενόχωρο του πίνακα A.

Θα δείξουμε οτι γενικότερα, για έναν $m \times n$ πίνακα, υπάρχει ένα σύνολο διανυσμάτων με πλήθος ίσο με το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών, τέτοιο ώστε κάθε διάνυσμα του μηδενόχωρου γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των διανυσμάτων. Για να βρούμε ένα τέτοιο σύνολο διανυσμάτων, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ακόλουθη διαδικασία.

Σύμφωνα με το συμβολισμό του Ορισμού 4.5, οι βασικές μεταβλητές είναι οι $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$. Αριθμούμε τις ελεύθερες μεταβλητές με τους δείκτες $q_1, \ldots, q_{n-r}$. Έτσι στο παράδειγμα 4.1, $j_1 = 1$, $j_2 = 3$ και $q_1 = 2$, $q_2 = 4$ και οι βασικές μεταβλητές είναι $x_1 = u$, $x_3 = w$, ενώ οι ελεύθερες μεταβήτές είναι $x_2 = v$ και $x_4 = y$.

Θεωρούμε το σύστημα r εξισώσεων που προκύπτει από τις μη μηδενικές γραμμές του κλιμακωτού πίνακα U. Στην τελευταία εξίσωση, που αντιστοιχεί στη γραμμή r του κλιμακωτού πίνακα U, εμφανίζεται μόνο μία βασική μεταβλητή με μη μηδενικό συντελεστή, η x_{j_r}. Άρα η τιμή της καθορίζεται από τις τιμές των ελεύθερων μεταβλητών. Στο παράδειγμα 4.1, η τελευταία μη μηδενική γραμμή $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ αντιστοιχεί στην εξίσωση $3x_3 + x_4 = 0$, άρα $x_3 = -\frac{1}{3}x_4$.

Στην προηγούμενη εξίσωση, που αντιστοιχεί στην $r-1$ γραμμή του κλιμακωτού πίνακα U, εμφανίζεται ακόμη μία βασική μεταβλητή με μη μηδενικό συντελεστή, η x_{r-1}. Η τιμή της καθορίζεται από τις τιμές των ελεύθερων μεταβλητών και την τιμή της x_{j_r}. Στο παράδειγμα 4.1, η προηγούμενη μη μηδενική γραμμή $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ αντιστοιχεί στην εξίσωση $x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$. Άρα $x_1 = -3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -3x_2 - x_4$.

Γενικά, σε ένα διάνυσμα του μηδενόχωρου $\mathcal{N}(A)$, η τιμή κάθε βασικής μεταβλητής x_{j_i} καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από τις τιμές των ελεύθερων μεταβλητών $x_{q_1}, \ldots, x_{q_{n-r}}$. Για κάθε ελεύθερη μεταβλητή x_{q_k} ορίζουμε ένα διάνυσμα $a_{q_k} \in \mathbb{R}^n$ ως εξής:

- Η συνιστώσα του a_{q_k} στη θέση q_k είναι 1.
- Οι συνιστώσες του a_{q_k} στις θέσεις q_l για $l = 1, \ldots, n-r$ και $l \neq k$, είναι 0.
- Οι συνιστώσες του a_{q_k} στις βασικές μεταβλητές καθορίζονται με ανάδρομη αντικατάσταση στις εξισώσεις που αντιστοιχούν στις r μη μηδενικές γραμμές του U.

Στο παράδειγμα 4.1,

$$a_{q_1} = a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad a_{q_2} = a_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Θα δείξουμε οτι κάθε διάνυσμα του μηδενόχωρου εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $a_{q_1}, \ldots, a_{q_{n-r}}$. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε διάνυσμα του μηδενόχωρου, $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathcal{N}(A)$. Έχουμε $Uc = Ac = 0$. Θα δείξουμε οτι το c γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $a_{q_1}, \ldots, a_{q_{n-r}}$, με συντελεστές τις συνιστώσες $c_{q_1}, \ldots, c_{q_{n-r}}$ του c, δηλαδή οτι

$$c = c_{q_1} a_{q_1} + c_{q_2} a_{q_2} + \cdots + c_{q_{n-r}} a_{q_{n-r}}.$$

Το διάνυσμα $a = c - (c_{q_1} a_{q_1} + \cdots + c_{q_{n-r}} a_{q_{n-r}})$ είναι ένα διάνυσμα που ικανοποιεί την εξίσωση $Ux = 0$, αφού $Uc = 0$ και $Ua_{q_i} = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n-r$. Επί πλέον, σε κάθε ελεύθερη μεταβλητή η συνιστώσα του a είναι 0. Τότε όμως οι μη μηδενικές γραμμές του U προσδιορίζουν με μοναδικό τρόπο τις συνιστώσες του a στις βασικές μεταβλητές: αυτές είναι επίσης 0. Άρα

$$c - (c_{q_1} a_{q_1} + \cdots + c_{q_{n-r}} a_{q_{n-r}}) = 0 \,.$$

Δραστηριότητα 4.12 Ανήκει το διάνυσμα $(3, -2, 3, -2)$ στο μηδενόχωρο του πίνακα A της Δραστηριότητας 4.10; Εάν ναι, γράψτε το ως γραμμικό συνδυασμό των λύσεων που βρήκατε.

Άσκηση 4.13 Βρείτε την παραγοντοποίηση LU σε κάτω τριγωνικό πίνακα και πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, για τον

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Προσδιορίστε τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος $Ax = 0$. Βρείτε τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος.

Άσκηση 4.14 Για τους πίνακες A της Άσκησης 4.12, βρείτε τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$.

Οι λύσεις της μη ομογενούς εξίσωσης

Τώρα εξετάζουμε τη μη ομογενή περίπτωση:

$$Ax = b \quad , \quad b \neq 0 \,.$$

Το γινόμενο Ax είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A με συντελεστές τις συνιστώσες του διανύσματος x. Συνεπώς το σύστημα $Ax = b$ έχει λύσεις εάν και μόνον εάν το b ανήκει στο χώρο στηλών του A. Εάν $b \notin \mathcal{R}(A)$, τότε το σύστημα δεν έχει λύση, και λέμε οτι οι εξισώσεις είναι **ασύμβατες**. Εάν $b \in \mathcal{R}(A)$, τότε η απαλοιφή και η ανάδρομη αντικατάσταση δίδει τις λύσεις.

Ας εξετάσουμε το παράδειγμα 4.1. Εφαρμόζοντας την απαλοιφή και στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης

$$Ax = b \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

παίρνουμε την εξίσωση

$$Ux = c \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{bmatrix}.$$

Βλέπουμε οτι εάν $b_3 - 2b_2 + 5b_1 \neq 0$ δεν είναι δυνατό να ικανοποιηθεί η τρίτη εξίσωση και το σύστημα είναι ασύμβατο. Στο παράδειγμα, ο χώρος στηλών του πίνακα A είναι ακριβώς το επίπεδο των διανυσμάτων (b_1, b_2, b_3) που ικανοποιούν $5b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$.

Θεωρούμε το διάνυσμα $b = (1, 5, 5)$. Αυτό ανήκει στο χώρο στηλών και το σύστημα δεν είναι ασύμβατο. Η απαλοιφή το μετατρέπει σε

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

Τώρα μπορούμε εύκολα να βρούμε τις λύσεις. Η τρίτη εξίσωση γίνεται $0x = 0$. Στις ελεύθερες μεταβλητές v και y μπορούμε να δώσουμε οποιαδήποτε τιμή. Οι τιμές των βασικών μεταβλητών προσδιορίζονται με ανάδρομη αντικατάσταση στις άλλες δύο εξισώσεις. Η δεύτερη εξίσωση $3w + y = 3$ δίδει $w = 1 - \frac{y}{3}$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε $u + 3v + 3(1 - \frac{y}{3}) + 2y = 1$, που δίδει $u = 2 - 3v - y$. Δηλαδή οι λύσεις τις εξίσωσης είναι

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - 3v - y \\ v \\ 1 - \frac{y}{3} \\ y \end{bmatrix}.$$

Είναι προτιμότερο να εκφράσουμε τη **γενική λύση** ως άθροισμα μίας ειδικής λύσης, και της γενικής λύσης του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$. Πράγματι, εάν x_1 και x_2 είναι δύο διαφορετικές λύσεις της $Ax = b$, τότε $A(x_1 - x_2) = 0$, δηλαδή η διαφορά δύο λύσεων του συστήματος $Ax = b$ είναι ένα διάνυσμα του μηδενόχωρου του A.

Για να βρούμε μια ειδική λύση, μπορούμε να δώσουμε σε όλες τις ελεύθερες μεταβλητές την τιμή 0 και να χρησιμοποιήσουμε τις r μη μηδενικές γραμμές του πίνακα U για να υπολογίσουμε τις τιμές των βασικών μεταβλητών. Στο παράδειγμα 4.4, μία ειδική λύση είναι η $x = (-2, 0, 1, 0)$.

Για να βρούμε τη γενική λύση του συστήματος 4.4 προσθέτουμε στην ειδική λύση οποιαδήποτε λύση της ομογενούς εξίσωσης, 4.3.

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Καταγράφουμε αυτά τα αποτελέσματα στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 4.5 *Η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύσεις εάν και μόνον εάν b ανήκει στο χώρο στηλών του A. Εάν x_1 είναι μία λύση, τότε η γενική λύση $x_{\gamma\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{\eta}}$ είναι της μορφής*

$$x_{\gamma\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{\eta}} = x_1 + x_0 \,,$$

όπου x_0 είναι οποιαδήποτε λύση της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$.

Παρατηρούμε οτι το σύνολο των λύσεων στην περίπτωση $b \neq 0$ δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος: είναι ο αφινικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που είναι παράλληλος προς το μηδενόχωρο του A και περιέχει την ειδική λύση.

Ονομάζουμε **τάξη του πίνακα** A τον αριθμό r των οδηγών που εμφανίζονται στην απαλοιφή. Εάν υπάρχουν r οδηγοί, τότε υπάρχουν r βασικές μεταβλητές και $n - r$ ελεύθερες μεταβλητές. Είναι προφανές οτι ο αριθμός των οδηγών είναι ίσος με τον αριθμό των μη μηδενικών γραμμών στον κλιμακωτό πίνακα U.

Εάν $r = n$, τότε δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές, συνεπώς ο μηδενόχωρος του A είναι $\{0 \in \mathbb{R}^n\}$, και εάν υπάρχει κάποια λύση, αυτή είναι μοναδική.

Εάν $r = m$, τότε δεν είναι δύσκολο να δούμε οτι όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ ανήκουν στο χώρο στηλών του A, και συνεπώς η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύση για κάθε b.

Εάν $r = m = n$, τότε έχουμε τετραγωνικό μη ιδιόμορφο πίνακα: η εξίσωση έχει πάντα μία και μοναδική λύση.

Άσκηση 4.15 Για τους πίνακες A της Άσκησης 4.12, βρείτε την τάξη του πίνακα, και τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συνιστώσες b_i του διανύσματος b, ώστε να έχει λύση η εξίσωση $Ax = b$. Σε κάθε περίπτωση, επιλέξτε ένα διάνυσμα b που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες, και βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος.

Άσκηση 4.16 Εάν A είναι 2×3 και C είναι 3×2 πίνακες, δείξτε οτι CA δεν μπορεί να είναι ο ταυτοτικός πίνακας (εξετάστε την τάξη του CA). Βρείτε ένα παράδειγμα στο οποίο $AC = I$.

Άσκηση 4.17 Εφαρμόστε απαλοιφή στον επαυξημένο πίνακα $[A \vdots b]$ για να βρείτε τον κλιμακωτό πίνακα U και τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συνιστώσες του b για να έχει λύση το σύστημα $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$, και τη γενική λύση της $Ax = b$ όταν $b = (4,\, 3,\, 5)$.

Θεωρήστε τον κλιμακωτό πίνακα

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Μπορούμε να συνεχίσουμε την απαλοιφή προς τα πάνω, ώστε να μηδενίσουμε τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από τους οδηγούς, και στη συνέχεια να διαιρέσουμε κάθε μη μηδενική γραμμή με τον αντίστοιχο οδηγό, ώστε να έχουμε 1 στη θέση των οδηγών. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα καταλήγουμε στον πίνακα

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Αυτός ο πίνακας έχει *ανηγμένη κλιμακωτή μορφή*, και είναι ο απλούστερος πίνακας που προκύπτει με απαλοιφή από τον A.

Άσκηση 4.18 Βρείτε τους πίνακες R σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή που αντιστοιχούν στους πίνακες

1. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

3. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 7 & 13 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4.19 Δείξτε οτι κάθε $m \times n$ πίνακας τάξεως r γράφεται ως γινόμενο ενός $m \times r$ και ενός $r \times n$ πίνακα:

$$A = (\text{στήλες του } A \text{ που περιέχουν οδηγούς})\ (\text{ μη μηδενικές γραμμές του } R).$$

Άσκηση 4.20 Δείξτε οτι η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύσεις εάν και μόνον εάν η τάξη του πίνακα A είναι ίση με την τάξη του επαυξημένου πίνακα $[A \,\vdots\, b]$.

Άσκηση 4.21 Ποιά διανύσματα (b_1, b_2, b_3) βρίσκονται στο χώρο στηλών του A; Ποιοί γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμών του A δίδουν 0;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4.22 Ποιές συνθήκες στα b_1, b_2, b_3, b_4 καθιστούν το σύστημα επιλύσιμο; Βρείτε όλες τις λύσεις.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 4.23 Ποιά συνθήκη στα b_1, b_2, b_3 καθιστά το σύστημα επιλύσιμο; Ξεκινήστε με τον επαυξημένο πίνακα $[A \vdots b]$, και βρείτε όλες τις λύσεις όταν ικανοποιείται η συνθήκη.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & = & b_1 \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & b_2 \\ 4x & + & 9y & - & 8z & = & b_3 \end{array}$$

Άσκηση 4.24 Εάν η εξίσωση $Ax = b$ έχει δύο διαφορετικές λύσεις x_1 και x_2, βρείτε δύο διαφορετικές λύσεις της $Ax = 0$. Στη συνέχεια βρείτε άλλη μία λύση της $Ax = b$.

Άσκηση 4.25 Γράψτε όλες τις σχέσεις που μπορείτε να συμπεράνετε για τα r, m και n, εάν γνωρίζετε οτι ο $m \times n$ πίνακας A έχει τάξη r, και για την εξίσωση $Ax = b$ ισχύει:

1. υπάρχουν κάποια b για τα οποία δεν έχει λύση.
2. για κάθε b έχει άπειρες λύσεις.
3. υπάρχει ακριβώς μία λύση για κάποια b, καμία λύση για κάποια άλλα b.
4. ακριβώς μία λύση για κάθε b.

Άσκηση 4.26 Επιλέξτε τον αριθμό q, αν είναι δυνατόν, έτσι ώστε η τάξη των πινάκων A και B να είναι α′) 1, β′) 2, γ′) 3.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & q \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ q & 2 & q \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 4.27 Ο μηδενοχώρος ενός 3×4 πίνακα A είναι η ευθεία που περιέχει το $(2, 3, 1, 0)$.

1. Βρείτε την τάξη του πίνακα A, και τη γενική λύση της $Ax = 0$;
2. Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R του A, (δείτε την Άσκηση 4.18).

Άσκηση 4.28 Είναι τα ακόλουθα αληθή ή ψευδή; Δώστε αντιπαράδειγμα εάν είναι ψευδή και αιτιολόγηση εάν είναι αληθή.

1. Ένας τετραγωνικός πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.
2. Ένας αντιστρέψιμος πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.
3. Ένας $m \times n$ πίνακας δεν έχει περισσότερες από n βασικές μεταβλητές.
4. Ένας $m \times n$ πίνακας δεν έχει περισσότερες από m βασικές μεταβλητές.

Άσκηση 4.29 Βρείτε τον πίνακα A εάν γνωρίζετε οτι η γενική λύση του συστήματος $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 4.30 Βρείτε έναν 2×2 πίνακα του οποίου ο μηδενοχώρος είναι ίσος με το χώρο στηλών.

Άσκηση 4.31 Βρείτε έναν πίνακα του οποίου ο μηδενοχώρος αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων $(2, 2, 1, 0)$ και $(3, 1, 0, 1)$.

Άσκηση 4.32 Βρείτε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών περιέχει το $(1, 1, 1)$ και ο μηδενοχώρος αποτελείται από τα πολλαπλάσια του $(1, 1, 1, 1)$.

Άσκηση 4.33 Βρείτε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών περιέχει τα $(1, 1, 0)$ και $(0, 1, 1)$ και ο μηδενοχώρος τα $(1, 0, 1)$ και $(0, 0, 1)$

Κεφάλαιο 5

Διανυσματικοί Χώροι και Υπόχωροι

Μέχρι τώρα έχουμε δει δύο είδη διανυσμάτων, τα γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο ή στο χώρο με σημείο εφαρμογής στο O, $T_O E^k$, και τα αριθμητικά διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$. Κοινό χαρακτηριστικό αυτών των δύο ειδών διανυσμάτων είναι οτι ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό, οι οποίες έχουν τις ίδιες ιδιότητες στις δύο περιπτώσεις, όπως είδαμε στις Προτάσεις 1.1 και 1.6.

Υπάρχουν άλλα μαθηματικά αντικείμενα με τα οποία μπορούμε να κάνουμε αυτές τις πράξεις; Εύκολα βρίσκουμε κάποια παραδείγματα:

- πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές: εάν $p(x)$ και $q(x)$ είναι πολυώνυμα, και c είναι πραγματικός αριθμός, τότε $p(x) + q(x)$ και $cp(x)$ είναι επίσης πολυώνυμα.

- ακολουθίες πραγματικών αριθμών: εάν a_n και b_n είναι ακολουθίες, $a_n + b_n$ και ca_n είναι επίσης ακολουθία.

- συναρτήσεις από ένα σύνολο X στους πραγματικούς αριθμούς: εάν $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ και $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις, τότε $f + g$, που ορίζεται ως $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, και cf, που ορίζεται ως $(cf)(x) = cf(x)$, είναι επίσης συναρτήσεις από το X στο $\mathbb{R}$.

5.1 Αξιώματα Διανυσματικού Χώρου

Θα ορίσουμε ένα διανυσματικό χώρο πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς, ως ένα σύνολο με δύο πράξεις, που ικανοποιούν τα κατάλληλα αξιώματα.

Ορισμός 5.1. Θεωρούμε ένα σύνολο V με δύο πράξεις, την πρόσθεση διανυσμάτων,

$$\alpha : V \times V \longrightarrow V \qquad \alpha(v, w) = v \dot{+} w$$

και τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με πραγματικό αριθμό ,

$$\mu : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V \qquad \mu(a, v) = a \cdot v\,.$$

Το σύνολο V με τις πράξεις α και μ, ονομάζεται **διανυσματικός χώρος (πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς)** εάν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα.

ΔΧ1. Για κάθε $v, w \in V$, $\quad v \dot{+} w = w \dot{+} v$.

ΔΧ2. Για κάθε $v, w, u \in V$, $\quad (v \dot{+} w) \dot{+} u = v \dot{+} (w \dot{+} u)$.

ΔΧ3. Υπάρχει στοιχείο $\bar{0} \in V$ τέτοιο ώστε, για κάθε $v \in V$, $\quad v \dot{+} \bar{0} = v$.

ΔΧ4. Για κάθε $v \in V$ υπάρχει $w \in V$ τέτοιο ώστε $u \dot{+} w = \bar{0}$.

ΔΧ5. Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και $v \in V$, $\quad a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$.

ΔΧ6. Για κάθε $v \in V$ ισχύει $1 \cdot v = v$.

ΔΧ7. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $v, w \in V$, $\quad a \cdot (v \dot{+} w) = a \cdot v \dot{+} a \cdot w$.

ΔΧ8. Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και $v, \in V$, $\quad (a + b) \cdot v = a \cdot v \dot{+} b \cdot v$.

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου ονομάζονται **διανύσματα**.

Παρατήρηση: Στη διατύπωση των αξιωμάτων χρησιμοποιούμε το σύμβολο $+$ για την πρόσθεση πραγματικών αριθμών, και το σύμβολο $\dot{+}$ για την πρόσθεση διανυσμάτων. Αργότερα δεν θα κάνουμε αυτή τη διάκριση, καθώς θα είναι σαφές από τα συμφραζόμενα σε ποιά πράξη αναφερόμαστε. Επίσης, εάν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο 0 είτε για τον αριθμό μηδέν, είτε για το μηδενικό διάνυσμα του V.

Παράδειγμα 5.1 Τα σύνολα $\mathbb{R}^n$ για $n = 1, 2, 3, \ldots$, με τις συνηθισμένες πράξεις, είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς.

Παράδειγμα 5.2 Στο σύνολο $T_O E^k$ των γεωμετρικών διανυσμάτων στο επίπεδο ή στο χώρο, με σημείο εφαρμογής στο O ορίζεται το άθροισμα γεωμετρικών διανυσμάτων, $\vec{v} + \vec{w}$, και το γινόμενο ενός γεωμετρικού διανύσματος με έναν αριθμό, $c\vec{v}$. Με αυτές τις πράξεις $T_O E^k$ είναι διανυσματικός χώρος, και ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος του E^k στο σημείο O.

Παράδειγμα 5.3 Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συμβολίζεται $C^0(\mathbb{R})$. Σε αυτό ορίζουμε την πρόσθεση δύο συναρτήσεων κατά σημείο, $(f \dot{+} g)(x) = f(x) + g(x)$, και τον πολλαπλασιασμό μίας συνάρτησης με έναν αριθμό επίσης κατά σημείο $(c \cdot f)(x) = cf(x)$.

Είναι γνωστό οτι εάν f και g είναι συνεχείς, τότε $f \dot{+} g$ και $c \cdot f$ είναι επίσης συνεχείς. Το σύνολο $C^0(\mathbb{R})$ με αυτές τις πράξεις είναι διανυσματικός χώρος.

Παράδειγμα 5.4 Ας δούμε κάποια παραδείγματα συνόλων που δεν είναι διανυσματικοί χώροι.

1. Το ημιεπίπεδο $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Το άθροισμα δύο στοιχείων του $\mathcal{H}$ ορίζεται κανονικά. Όμως δεν υπάρχει το αντίθετο ενός στοιχείου: το $(-x, -y)$ δεν ανήκει στο $\mathcal{H}$.

2. Το σύνολο των σημείων στο επίπεδο με ακέραιες συντεταγμένες, $\mathbb{Z}^2 = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Εδώ ορίζεται η πρόσθεση και ικανοποιούνται τα αξιώματα ΔΧ1, …, ΔΧ4. Όμως δεν ορίζεται ο πολλαπλασιασμός με μή ακέραιο αριθμό: $\frac{1}{2} \cdot (3, 5) \notin \mathbb{Z}^2$.

5.2 Πρώτα αποτελέσματα από τα αξιώματα.

Το μηδενικό διάνυσμα ενός χώρου είναι μοναδικό, όπως βλέπουμε εάν υποθέσουμε οτι $\tilde{0}$ είναι ένα στοιχείο με την ιδιότητα (ΔΧ3). Τότε $\tilde{0} = \bar{0} \dot{+} \tilde{0} = \bar{0}$.

Λήμμα 5.1 *Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V, με πράξεις $\dot{+}$ και $\cdot$.*

1. *Το γινόμενο ενός αριθμού $a \in \mathbb{R}$, και ενός διανύσματος $v \in V$, είναι το μηδενικό διάνυσμα εάν και μόνον εάν $a = 0$ ή $v = 0$.*

   Πιο αναλυτικά, για κάθε $v \in V$, $0 \cdot v = \bar{0}$, και για κάθε $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot \bar{0} = \bar{0}$, και αντίστροφα, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και για κάθε $v \in V$, εάν $a \cdot v = \bar{0}$, τότε είτε $a = 0$ ή $v = \bar{0}$.

2. *Το αντίθετο ενός διανύσματος $v \in V$ είναι μοναδικό, και ίσο με $(-1) \cdot v$.*

Απόδειξη. Για το 1, θεωρούμε ένα διάνυσμα $v \in V$, και τον αριθμό 0. Θα δείξουμε οτι $0 \cdot v = \bar{0}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \cdot v &= (0 + 0) \cdot v \\ &= 0 \cdot v \dot{+} 0 \cdot v \end{aligned}$$

Έστω w ένα αντίθετο του διανύσματος $0 \cdot v$, δηλαδή $0 \cdot v \dot{+} w = \bar{0}$. Τότε

$$\begin{aligned} \bar{0} &= 0 \cdot v \dot{+} w \\ &= (0 \cdot v \dot{+} 0 \cdot v) \dot{+} w \\ &= 0 \cdot v \dot{+} (0 \cdot v \dot{+} w) \\ &= 0 \cdot v \dot{+} \bar{0} \\ &= 0 \cdot v \end{aligned}$$

Τώρα θεωρούμε έναν αριθμό $a \in \mathbb{R}$, και το μηδενικό διάνυσμα $\bar{0} \in V$. Θα δείξουμε οτι $a \cdot \bar{0} = \bar{0}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} a \cdot \bar{0} &= a \cdot (\bar{0} \dotplus \bar{0}) \\ &= a \cdot \bar{0} \dotplus a \cdot \bar{0} \end{aligned}$$

Έστω u ένα αντίθετο του διανύσματος $a \cdot \bar{0}$, δηλαδή $a \cdot \bar{0} + u = \bar{0}$. Τότε

$$\begin{aligned} \bar{0} &= a \cdot \bar{0} \dotplus u \\ &= (a \cdot \bar{0} \dotplus a \cdot \bar{0}) \dotplus u \\ &= a \cdot \bar{0} \dotplus (a \cdot \bar{0} \dotplus u) \\ &= a \cdot \bar{0} \dotplus \bar{0} \\ &= a \cdot \bar{0} \end{aligned}$$

Αντίστροφα, εάν $a \neq 0$ και $a \cdot v = \bar{0}$, τότε

$$v = 1 \cdot v = (a^{-1}a) \cdot v = a^{-1} \cdot (a \cdot v) = a^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{0}\,.$$

Τέλος, υποθέτουμε οτι $v \neq 0$ και $a \cdot v = \bar{0}$. Εάν $a \neq 0$, από το προηγούμενο $v = \bar{0}$, αντίφαση. Άρα $a = 0$.

Για το 2, υποθέτουμε οτι w και w' είναι αντίθετα του $v \in V$, και θα δείξουμε οτι $w = w'$. Έχουμε οτι $v \dotplus w = \bar{0} = v \dotplus w'$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} w &= w \dotplus \bar{0} \\ &= w \dotplus (v \dotplus w') \\ &= (w \dotplus v) \dotplus w' \\ &= (v \dotplus w) \dotplus w' \\ &= \bar{0} \dotplus w' \\ &= w' \dotplus \bar{0} \\ &= w' \end{aligned}$$

Τώρα δείχνουμε οτι το γινόμενο $(-1) \cdot v$ είναι αντίθετο του v:

$$\begin{aligned} v \dotplus ((-1) \cdot v) &= (1 \cdot v) \dotplus ((-1) \cdot v) \\ &= (1 + (-1)) \cdot v \\ &= 0 \cdot v \\ &= \bar{0} \end{aligned}$$

Το μοναδικό αντίθετο του v συμβολίζουμε $-v$.

□

Ως εφαρμογή του Λήμματος 5.1,1, έχουμε τους **κανόνες διαγραφής** για τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό.

Λήμμα 5.2 *Εάν $a \neq 0$ και $a \cdot v = a \cdot u$ τότε $v = u$.*
Εάν $v \neq \bar{0}$ και $a \cdot v = b \cdot v$ τότε $a = b$.

Δραστηριότητα 5.1 Γράψτε την απόδειξη των δύο κανόνων διαγραφής.

5.3 Παραδείγματα διανυσματικών χώρων πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς.

Παράδειγμα 5.5 Το σύνολο όλων των γεωμετρικών διανυσμάτων στο επίπεδο, με σημείο εφαρμογής σε οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου, δεν αποτελεί διανυσματικό χώρο το ίδιο, αφού η πρόσθεση δύο γεωμετρικών διανυσμάτων ορίζεται μόνον όταν αυτά έχουν το ίδιο σημείο εφαρμογής. Στο ''Επίπεδο και Χώρος'' χρησιμοποιήσαμε την έννοια της παράλληλης μεταφοράς για να ορίσουμε τα 'ελεύθερα διανύσματα', στα οποία είναι 'καλά ορισμένη' η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός με αριθμό. Το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων στο επίπεδο ή στο χώρο αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς, τον οποίο θα συμβολίζουμε VE^k.

Παράδειγμα 5.6 Εάν επιλέξουμε σημείο αναφοράς O στο E^k, μπορούμε να ορίσουμε τις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού με αριθμό για τα σημεία του E^k μέσω των αντίστοιχων πράξεων των διανυσμάτων θέσης των σημείων: Εάν A και B είναι σημεία του E^k, ορίζουμε $A \dot{+} B = C$ εάν $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, και παρόμοια για τον πολλαπλασιασμό με αριθμό. Με αυτές τις πράξεις το επίπεδο E^2 και ο χώρος E^3 ικανοποιούν τα αξιώματα και είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.7 Στο σύνολο των $m \times n$ πινάκων έχουμε ορίσει πρόσθεση και πολλαπλασιασμό με αριθμό. Με αυτές τις πράξεις το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με συνιστώσες πραγματικούς αριθμούς ικανοποιεί τα αξιώματα και είναι διανυσματικός χώρος, τον οποίο θα συμβολίζουμε $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{R})$.

Θα δούμε κάποια γενικά παραδείγματα διανυσματικών χώρων πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς.

Παράδειγμα 5.8 Διατεταγμένες n−άδες στοιχείων ενός διανυσματικού χώρου V.

Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το $\mathbb{R}$ και το σύνολο των διατεταγμένων n-άδων στοιχείων του V,

$$V^n = \{(v_1, \ldots, v_n) \mid v_i \in V, i = 1, \ldots n\}.$$

Οι πράξεις ορίζονται κατά συνιστώσα, χρησιμοποιώντας τις πράξεις του V: εάν $v = (v_1, \ldots, v_n)$ και $u = (u_1, \ldots, u_n)$ ανήκουν στο V^n και $a \in \mathbb{R}$, τότε

$$v \dot{+} u = (v_1 + u_1, \ldots, v_n + u_n)$$

και

$$a \cdot v = (av_1, \ldots, av_n)\,.$$

Μηδενικό διάνυσμα είναι το $\bar{0} = (0, \ldots, 0) \in V^n$. Η ισχύς των αξιωμάτων του διανυσματικού χώρου αποδεικνύεται εύκολα με χρήση των αντίστοιχων αξιωμάτων στο V.

Παράδειγμα 5.9 Ακολουθίες με όρους στο $\mathbb{R}$ ή σε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε το σύνολο των ακολουθιών πραγματικών αριθμών,

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_1,\, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{R},\, i \in \mathbb{N}\}\,.$$

Οι πράξεις ορίζονται *κατά συνιστώσα*: εάν $(x) = (x_1,\, x_2, \ldots)$, $(y) = (y_1,\, y_2, \ldots)$, και $a \in \mathbb{R}$, τότε

$$(x) \dotplus (y) = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2, \ldots)$$

και

$$a(x) = (ax_1,\, ax_2, \ldots).$$

Μηδενικό διάνυσμα είναι η ακολουθία $\bar{0} = (0,\, 0, \ldots)$.

Παρόμοια, εάν V είναι διανυσματικός χώρος, οι ακολουθίες με όρους στο V,

$$V^{\mathbb{N}} = \{(v_1,\, v_2, \ldots) : v_i \in V,\, i \in \mathbb{N}\}\,,$$

με πράξεις κατά συνιστώσα, είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.10 Απεικονίσεις από ένα σύνολο A στο $\mathbb{R}$, ή σε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το $\mathbb{R}$.

Το σύνολο όλων των απεικονίσεων από το A στο $\mathbb{R}$ συμβολίζεται $\mathbb{R}^A$. Εάν $f,\, g \in \mathbb{R}^A$ και $a \in \mathbb{R}$, ορίζουμε τις απεικονίσεις $f \dotplus g$ και $a \cdot f$ οι οποίες, για κάθε $x \in A$, ικανοποιούν

$$\begin{aligned}(f \dotplus g)(x) &= f(x) + g(x)\\ (a \cdot f)(x) &= af(x)\end{aligned}$$

Με αυτές τις πράξεις, τις οποίες ονομάζουμε *πρόσθεση* και *πολλαπλασιασμό κατά σημείο*, το σύνολο $\mathbb{R}^A$ είναι διανυσματικός χώρος. Μηδενικό διάνυσμα είναι η σταθερή απεικόνιση $\bar{0} : A \longrightarrow \mathbb{R}$, για την οποία $\bar{0}(x) = 0$ για κάθε $x \in A$. Ανάλογα ορίζεται η δομή διανυσματικού χώρου στο σύνολο V^A όλων των απεικονίσεων από το σύνολο A στο διανυσματικό χώρο V.

Παράδειγμα 5.11 Πολυώνυμα με συντελεστές στο $\mathbb{R}$, με μία ή περισσότερες μεταβλητές.

Ένα πολυώνυμο μίας μεταβλητής x με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ είναι ένα τυπικό άθροισμα

$$p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n, \qquad a_i \in \mathbb{R},\, i = 1,\, \ldots, n \text{ και } a_n \neq 0\,.$$

Το σύνολο όλων των πολυωνύμων μίας μεταβλητής x με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ συμβολίζεται $\mathbb{R}[x]$. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το συμβολισμό $\mathbb{R}[x]_n$ για τα πολυώνυμα μίας μεταβλητής x βαθμού ίσου ή μικρότερου από n.

Η πρόσθεση πολυωνύμων και ο πολλαπλασιασμός με αριθμό ορίζονται όπως συνήθως. Όταν μελετάμε το σύνολο των πολυωνύμων ως διανυσματικό χώρο, δεν μας απασχολεί ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων. Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}[x]$ είναι το πολυώνυμο $\bar{0}$, στο οποίο όλοι οι συντελεστές είναι 0.

Ανάλογα ορίζονται χώροι πολυωνύμων με περισσότερες μεταβλητές. Για παράδειγμα ένα πολυώνυμο δύο μεταβλητών, x και y, είναι ένα τυπικό άθροισμα

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_{ij}x^iy^j\,.$$

Παράδειγμα 5.12 Τυπικές δυναμοσειρές, με μία ή περισσότερες μεταβλητές και συντελεστές στο $\mathbb{R}$.

Μία δυναμοσειρά μίας μεταβλητής t, με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ είναι ένα τυπικό άθροισμα

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\,, \qquad a_i \in \mathbb{R}\,, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Το σύνολο όλων των δυναμοσειρών μίας μεταβλητής t με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ συμβολίζεται $\mathbb{R}(t)$.

Η πρόσθεση δυναμοσειρών και ο πολλαπλασιασμός με αριθμό $c \in \mathbb{R}$, ορίζονται ως εξής

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\right) \dot{+} \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)t^k$$

$$c \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\right) = \sum_{j=0}^{\infty}(ca_j)t^j.$$

Μηδενικό διάνυσμα είναι η δυναμοσειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} 0t^i.$$

Παράδειγμα 5.13 Τυπικά αθροίσματα στοιχείων ενός συνόλου X με συντελεστές στο $\mathbb{R}$, ή σε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε ένα σύνολο X και τα τυπικά αθροίσματα

$$\sum_{x\in X} a_x x\,, \qquad a_x \in \mathbb{R}$$

Η πρόσθεση ορίζεται μέσω της πρόσθεσης των συντελεστών ομοίων όρων :

$$\sum_{x\in X} a_x x \dot{+} \sum_{x\in X} b_x x = \sum_{x\in X} (a_x + b_x)x,$$

ενώ ο πολλαπλασιασμός με τον αριθμό $c \in \mathbb{R}$, μέσω του πολλαπλασιασμού των συντελεστών:

$$c \cdot \sum_{x\in X} a_x x = \sum_{x\in X} (ca_x)x.$$

Το μηδενικό διάνυσμα είναι το τυπικό άθροισμα με όλους τους συντελεστές ίσους με 0,

$$\bar{0} = \sum_{x\in X} 0x.$$

Παράδειγμα 5.14 Θεωρούμε απεικονίσεις οι οποίες απεικονίζουν κάθε σημείο X του επιπέδου E^2 σε ένα γεωμετρικό διάνυσμα $\overrightarrow{XA} \in T_X E^2$, δηλαδή απεικονίσεις της μορφής $f : E^2 \longrightarrow \bigcup_{X\in E^2} T_X E^2$ για τις οποίες ισχύει $f(X) \in T_X E^2$. Αυτές τις συναρτήσεις μπορούμε να τις προσθέσουμε μεταξύ τους (και να τις πολλαπλασιάσουμε με αριθμό) κατά σημείο:

$$(f \dot{+} g)(X) = f(X) + g(X) = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$$

όπου το τελευταίο άθροισμα ορίζεται στο διανυσματικό χώρο $T_X E^2$. Τέτοιες απεικονίσεις ονομάζονται **διανυσματικά πεδία** στο E^2 και αποτελούν σημαντικά αντικείμενα τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική. Το σύνολο των διανυσματικών πεδίων στο E^2 αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς.

5.4 Διανυσματικοί υπόχωροι

Ορισμός 5.2. Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς, και ένα υποσύνολο X του V. Το X λέγεται **διανυσματικός υπόχωρος** του V εάν

1. Το X δεν είναι κενό.

2. Το X είναι κλειστό ως πρός την πρόθεση διανυσμάτων,

$$v, w \in X \Rightarrow v + w \in X\,.$$

3. Το X είναι κλειστό ως πρός τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό,

$$v \in X,\, a \in \mathbb{R} \Rightarrow av \in X\,.$$

Λήμμα 5.3 *Εάν X είναι διανυσματικός υπόχωρος του V, τότε το X, με τους περιορισμούς των πράξεων του V,*

$$\alpha|_{X\times X} : X \times X \longrightarrow X$$
$$\mu|_{\mathbb{R}\times X} : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$$

είναι διανυσματικός χώρος.

Απόδειξη. Ελέγχουμε οτι, εάν το υποσύνολο X είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του V, τότε ικανοποιούνται τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου. Τα αξιώματα ΔΧ1, ΔΧ2, ΔΧ5, ΔΧ7 και ΔΧ8 ισχύουν για στοιχεία του X, αφού ισχύουν για όλα τα στοιχεία του V. Για να δείξουμε οτι το $\bar{0}$ ανήκει στο X, (ΔΧ3), παρατηρούμε οτι για οποιοδήποτε $v \in X$, $0 \cdot v = \bar{0}$, άρα $\bar{0} \in X$. Για να δείξουμε οτι το αντίθετο ενός στοιχείου του X ανήκει στο X, παρατηρούμε οτι αυτό είναι ίσο με $(-1) \cdot v$.

□

Παράδειγμα 5.15 Έχουμε δει οτι ο χώρος στηλών και ο μηδενόχωρος ενός $m \times n$ πίνακα είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^m$ και του $\mathbb{R}^n$ αντίστοιχα. Κάθε διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^k$ μπορεί να περιγραφεί με αυτούς τους δύο τρόπους: είτε ως το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών ενός πεπερασμένου αριθμού διανυσμάτων, είτε ως το σύνολο των διανυσμάτων που ικανοποιούν μία εξίσωση της μορφής $Ax = 0$.

Παράδειγμα 5.16 Σε ένα διανυσματικό χώρο V, για κάθε $v \in V$ το σύνολο $\{a\,v : a \in \mathbb{R}\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος.

Παράδειγμα 5.17 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ των ακολουθιών στους πραγματικούς αριθμούς, το υποσύνολο των ακολουθιών που είναι τελικά ίσες με μηδέν είναι διανυσματικός υπόχωρος, (η ακολουθία $(x_1, x_2, \ldots)$ είναι τελικά ίση με μηδέν εάν υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n > M \Rightarrow x_n = 0$).

Εάν X και Y είναι δύο διανυσματικοί υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V, είναι τα σύνολα $X \cup Y$ και $X \cap Y$ διανυσματικοί υπόχωροι; Ας εξετάσουμε κάποια παραδείγματα.

Εάν V είναι ο χώρος $\mathbb{R}^3$, και X, Y είναι δύο διαφορετικές ευθείες που περιέχουν το 0, είναι η ένωση $X \cup Y$ διανυσματικός υπόχωρος;

Εάν X αποτελείται από το διάνυσμα $(1, 1, 2)$ και όλα τα πολλαπλάσιά του και Y αποτελείται από όλα τα πολλαπλάσια του $(1, 1, 0)$,

$$X = \{a(1, 1, 2) : a \in \mathbb{R}\} \quad \text{και} \quad Y = \{a(1, 1, 0) : a \in \mathbb{R}\}\ ,$$

τότε $(1, 1, 2) + (1, 1, 0) = (2, 2, 2)$. Αλλά το διάνυσμα $(2, 2, 2)$ δεν ανήκει ούτε στο X, ούτε στο Y. Συμπεραίνουμε οτι $X \cup Y$ δεν είναι υποχρεωτικά διανυσματικός υπόχωρος.

Εάν τώρα U και W είναι δύο διαφορετικά επίπεδα στο $\mathbb{R}^3$, τα οποία περιέχουν το 0, είναι η τομή $U \cap W$ γραμμικός υπόχωρος;

Υποθέτουμε οτι

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\} ,$$

και

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y = 0\} .$$

Τότε η τομή των δύο επιπέδων $U \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, 2x + 3y = 0\}$ είναι μία ευθεία. Εύκολα βλέπουμε οτι αποτελείται από τα σημεία για τα οποία $x = 0$ και $y = 0$, δηλαδή αποτελείται από τα πολλαπλάσια του διανύσματος $(0, 0, 1)$, και είναι υπόχωρος του V.

Γενικότερα, εάν $U = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ και $W = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx = 0\}$, τότε $U \cap W$ αποτελείται από τα διανύσματα που ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις, δηλαδή από τις λύσεις της εξίσωσης $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x = 0$.

Λήμμα 5.4 *Εάν X, Y είναι διανυσματικοί υπόχωροι του V, τότε $X \cap Y$ είναι διανυσματικός υπόχωρος.*

Απόδειξη. Εάν $v, w \in X \cap Y$, τότε $v, w \in X$ και αφού X είναι διανυσματικός υπόχωρος, $v + w \in X$, και για κάθε $a \in \mathbb{R}$, $av \in X$. Παρόμοια, $v, w \in Y$ και συνεπώς $v + w \in Y$ και $av \in Y$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε οτι $v + w \in X \cap Y$, και $av \in X \cap Y$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$, δηλαδή οτι $X \cap Y$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με αριθμό, και συνεπώς είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

□

5.5 Γραμμικοί Συνδυασμοί

Η έννοια του γραμμικού συνδυασμού που είδαμε για γεωμετρικά και αριθμητικά διανύσματα, γενικεύεται σε κάθε διανυσματικό χώρο.

Ορισμός 5.3. Εάν $v_1, \ldots, v_k$ είναι διανύσματα του V, ένας **γραμμικός συνδυασμός** των $v_1, \ldots, v_k$ είναι ένα άθροισμα της μορφής $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k$, όπου οι συντελεστές $a_1, a_2, \ldots, a_k$ είναι πραγματικοί αριθμοί.
Γενικότερα, εάν S είναι οποιοδήποτε υποσύνολο (πεπερασμένο ή άπειρο) ενός διανυσματικού χώρου V, ένας **γραμμικός συνδυασμός** στοιχείων του S είναι ένα *πεπερασμένο* άθροισμα: $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$, όπου, για $i = 1, \ldots, k$, $v_i \in S$ και $a_i \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.18 Κάθε διάνυσμα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ και $e_3 = (0, 0, 1)$:

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) .$$

Παράδειγμα 5.19 Εάν $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ είναι δύο μη συγγραμμικά γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο E^2, κάθε διάνυσμα με αρχή στο O εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$: υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί a και b τέτοιοι ώστε

$$\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}\,.$$

Παράδειγμα 5.20 Για κάθε $k \geq 0$ θεωρούμε το μονώνυμο $p_k(x) = x^k$, όπου $p_0(x) = x^0 = 1$. Κάθε πολυώνυμο εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του συνόλου S όλων των μονωνύμων. Εάν $p(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n στο $\mathbb{R}[x]$, τότε

$$p(x) = a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n.$$

Γραμμική θήκη ενός συνόλου διανυσμάτων.

Εάν $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου V, θέλουμε να εξετάσουμε το *μικρότερο* διανυσματικό υποχώρο του V που περιέχει τα στοιχεία του S.

Είναι προφανές οτι ο ίδιος ο χώρος V περιέχει τα στοιχεία του S. Γενικεύοντας το Λήμμα 5.4, μπορούμε να δείξουμε οτι για κάθε συλλογή $\mathcal{A}$ διανυσματικών υπόχωρων του V που περιέχει τουλάχιστον έναν υπόχωρο $X \subseteq V$, η τομή όλων των υποχώρων που ανήκουν στην $\mathcal{A}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{T}$ όλων των διανυσματικών υπόχωρων του V οι οποίοι περιέχουν τα στοιχεία του S. Αυτό το σύνολο περιέχει το ίδιο το V, και συνεπώς δεν είναι κενό. Η τομή όλων των υποχώρων στο $\mathcal{T}$, $X = \bigcap_{Z \in \mathcal{T}} Z$, περιέχει τα στοιχεία του S, είναι διανυσματικός υπόχωρος του V, και είναι υπόχωρος κάθε διανυσματικού υπόχωρου του V που περιέχει τα στοιχεία του S. Με αυτή την έννοια X είναι ο μικρότερος διανυσματικός υπόχωρος του V ο οποίος περιέχει τα στοιχεία του S.

Θα δείξουμε οτι ο διανυσματικός υπόχωρος X είναι ίσος με το σύνολο Y όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του S. Πρώτα παρατηρούμε οτι αφού X είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου και περιέχει τα στοιχεία του S, περιέχει επίσης κάθε γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του S, δηλαδή $Y \subseteq X$.

Κατόπιν δείχνουμε οτι Y είναι διανυσματικός υπόχωρος του V. Εάν $x = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$ και $y = b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k$, για a_i, $b_i \in \mathbb{R}$, τότε $x + y$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S,

$$x + y = (a_1 + b_1)v_1 + \cdots + (a_k + b_k)v_k\,,$$

και εάν $c \in \mathbb{R}$, cx επίσης εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S,

$$cx = ca_1 v_1 + \cdots + ca_k v_k\,.$$

Άρα Y είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του V, και συνεπώς είναι υπόχωρος του V.

Εφόσον Y είναι διανυσματικός υπόχωρος του V, και περιέχει τα στοιχεία του S, ο X είναι υποσύνολο του Y, $X \subseteq Y$. Συμπεραίνουμε οτι $X = Y$, δηλαδή οτι ο μικρότερος διανυσματικός υπόχωρος του V που περιέχει τα στοιχεία του S είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του S.

Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_k$ το ονομάζουμε **γραμμική θήκη** των $v_1, \ldots, v_k$ και το συμβολίζουμε $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$. Λέμε οτι ο διανυσματικός υπόχωρος $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ **παράγεται** από τα $v_1, \ldots, v_k$.

Γενικότερα, εάν S είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του V, το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του S είναι ο μικρότερος διανυσματικός υπόχωρος του V ο οποίος περιέχει το S. Τον ονομάζουμε **γραμμική θήκη** (span) του S και το συμβολίζουμε $\langle S\rangle$. Λέμε επίσης οτι ο διανυσματικός υπόχωρος $\langle S\rangle$ **παράγεται** από το S, και το S ονομάζεται **παράγον σύνολο** του $\langle S\rangle$.

Εάν υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$ το οποίο παράγει το διανυσματικό χώρο V, λέμε οτι ο V είναι **πεπερασμένα παραγόμενος**.

Παράδειγμα 5.21 Ο διανυσματικός υπόχωρος $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$ είναι η γραμμική θήκη του διανύσματος $(1, -2)$. Πράγματι, κάθε στοιχείο του U είναι πολλαπλάσιο του $(1, -2)$.

Παράδειγμα 5.22 Το επίπεδο $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$, $a \neq 0$, παράγεται από τα διανύσματα $(b, -a, 0)$ και $(c, 0, -a)$:

$$E = \langle (b, -a, 0), (c, 0, -a)\rangle$$

Πράγματι, όπως ελέγχουμε εύκολα, εάν αντικαταστήσουμε το διάνυσμα $(b, -a, 0)$ ή το διάνυσμα $(c, 0, -a)$ για το (x, y, z) στην εξίσωση $ax + by + cz = 0$ αυτή ικανοποιείται. Συμπεραίνουμε οτι $\langle (b, -a, 0), (c, 0, -a)\rangle \subseteq E$.

Αντίστροφα, κάθε λύση της εξίσωσης $ax + by + cz = 0$, μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$s(b, -a, 0) + t(c, 0, -a)$$

για κατάλληλα $s, t \in \mathbb{R}$. Συνεπώς $E \subseteq \langle (b, -a, 0), (c, 0, -a)\rangle$.

Παράδειγμα 5.23 Ο μηδενικός υπόχωρος $\{0\}$ παράγεται από το κενό σύνολο, $\langle \varnothing\rangle = \{0\}$. Πράγματι, ο μηδενικός υπόχωρος είναι η τομή όλων των υποχώρων του V που περιέχουν τα στοιχεία του κενού συνόλου, δηλαδή όλων των υποχώρων του V.

Ο χώρος στηλών ενός πίνακα είναι η γραμμική θήκη των στηλών του πίνακα. Εάν $v_1, \ldots, v_n$ είναι n διανύσματα του $\mathbb{R}^m$, ένα διάνυσμα $w \in \mathbb{R}^m$ ανήκει στη γραμμική θήκη των $v_1, \ldots, v_n$ εάν και μόνον εάν το w ανήκει στο χώρο στηλών ενός πίνακα A με στήλες τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$. Γνωρίζουμε οτι ένα διάνυσμα w ανήκει στο χώρο στηλών του A εάν και μόνον εάν η εξίσωση $Ax = w$ έχει λύσεις. Συνεπώς για να ελέγξουμε εάν το διάνυσμα w ανήκει στη γραμμική θήκη των $v_1, \ldots, v_n$, θεωρούμε τον πίνακα A με στήλες τα $v_1, \ldots, v_n$ και εξετάζουμε εάν το σύστημα $Ax = w$ έχει λύσεις, δηλαδή εάν μετά την απαλοιφή Gauss στον επαυξημένο πίνακα $[A\vdots w]$, παίρνουμε έναν πίνακα $[U\vdots w']$ στον οποίο μηδενίζονται οι συνιστώσες του w' που αντιστοιχούν σε μηδενικές γραμμές του κλιμακωτού πίνακα U.

Παράδειγμα 5.24 Θα βρούμε τα διανύσματα που ανήκουν στη γραμμική θήκη των $v_1 = (1, 3, 2, -1)$, $v_2 = (2, 4, 4, 3)$ και $v_3 = (0, -2, 0, 5)$. Πρέπει να βρούμε τα διανύσματα $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ για τα οποία έχει λύσεις το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}.$$

Η απαλοιφή στον επαυξημένο πίνακα δίδει

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & w_1 \\ 3 & 4 & -2 & w_2 \\ 2 & 4 & 0 & w_3 \\ -1 & 3 & 5 & w_4 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & w_1 \\ 0 & -2 & -2 & w_2 - 3w_1 \\ 0 & 0 & 0 & w_3 - 2w_1 \\ 0 & 5 & 5 & w_4 + w_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & w_1 \\ 0 & -2 & -2 & w_2 - 3w_1 \\ 0 & 0 & 0 & w_3 - 2w_1 \\ 0 & 0 & 0 & w_4 + w_1 + \frac{5}{2}(w_2 - 3w_1) \end{bmatrix}.$$

Συμπεραίνουμε οτι τα διανύσματα που ανήκουν στη γραμμική θήκη των $v_1 = (1, 3, 2, -1)$, $v_2 = (2, 4, 4, 3)$ και $v_3 = (0, -2, 0, 5)$ είναι τα διανύσματα που ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} -2w_1 + w_3 &= 0\,, \\ 13w_1 - 5w_2 - 2w_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τους υπόχωρους X και Y του V που παράγονται από τα στοιχεία x_1, x_2 και y_1, y_2 αντίστοιχα, $X = \langle x_1, x_2 \rangle$, $Y = \langle y_1, y_2 \rangle$. Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τα στοιχεία του διανυσματικού υπόχωρου $X \cap Y$;

Εάν $u \in X \cap Y$, τότε $u \in X$ και μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των x_1, x_2: υπάρχουν αριθμοί $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $u = a_1x_1 + a_2x_2$. Επίσης $-u \in Y$, και εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των y_1, y_2, με συντελεστές $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$: $-u = b_1y_1 + b_2y_2$. Αλλά τότε

$$0 = u - u = a_1x_1 + a_2x_2 + b_1y_1 + b_2y_2\,.$$

Συμπεραίνουμε οτι η τομή $X \cap Y$ αποτελείται από τα διανύσματα της μορφής $b_1y_1 + b_2y_2$, όπου τα b_1, b_2 αποτελούν μέρος μιας λύσης (a_1, a_2, b_1, b_2) της διανυσματικής εξίσωσης

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b_1y_1 + b_2y_2 = 0 \qquad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Παράδειγμα 5.25 Θεωρούμε τους υπόχωρους X και Y του $\mathbb{R}^3$, $X = \langle x_1, x_2\rangle$, $Y = \langle y_1, y_2\rangle$, όπου $x_1 = (1, 1, 0)$, $x_2 = (-1, 0, 1)$, $y_1 = (1, -1, 1)$ και $y_2 = (1, 0, 3)$. Για να βρούμε τον υπόχωρο $X \cap Y$, προσδιορίζουμε τα b_1, b_2 τα οποία αποτελούν μέρος μίας λύσης του συστήματος

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0\,,$$

το οποίο γράφουμε σε μορφή πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0$$

και εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0$$

δηλαδή $b_1 = -\frac{4}{3}b_2$, και ο υπόχωρος $X \cap Y$ αποτελείται από διανύσματα της μορφής $b(-\frac{4}{3}y_1 + y_2)$ για $b \in \mathbb{R}$. Με άλλα λόγια, παράγεται από το διάνυσμα $-4(1, -1, 1) + 3(1, 0, 3) = (-1, 4, 5)$,

$$X \cap Y = \langle(-1, 4, 5)\rangle\ .$$

Αθροίσματα διανυσματικών υπόχωρων

Είδαμε οτι, εάν X, Y είναι διανυσματικοί υπόχωροι του V, $X \cap Y$ είναι επίσης διανυσματικός υπόχωρος, αλλά $X \cup Y$ δεν είναι, εν γένει, διανυσματικός υπόχωρος. Θα ορίσουμε ένα υποσύνολο του V, που είναι διανυσματικός υπόχωρος, και θα δείξουμε οτι είναι ο *μικρότερος* διανυσματικός υπόχωρος που περιέχει το $X \cup Y$.

Ορισμός 5.4. Εάν V είναι διανυσματικός χώρος, και X, Y είναι διανυσματικοί υπόχωροι του V, το σύνολο των διανυσμάτων που γράφονται ως άθροισμα ενός διανύσματος του X και ενός διανύσματος του Y,

$$X + Y = \{v \in V : \text{υπάρχουν } x \in X \text{ και } y \in Y \text{ τέτοια ώστε } v = x + y\}$$

ονομάζεται **άθροισμα** των X και Y.

Λήμμα 5.5 *Το άθροισμα των διανυσματικών υπόχωρων $X + Y$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V, και παράγεται από την ένωση $X \cup Y$,*

$$X + Y = \langle X \cup Y \rangle .$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$, $y \in Y$ ισχύει $x + y \in \langle X \cup Y \rangle$. Συμπεραίνουμε οτι $X + Y \subseteq \langle X \cup Y \rangle$.

Για την αντίθετη κατεύθυνση, είναι προφανές οτι $X \subseteq X + Y$, $Y \subseteq X + Y$, και συνεπώς $X \cup Y \subseteq X + Y$. Εύκολα ελέγχουμε οτι το σύνολο $X + Y$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου V, και συνεπώς είναι διανυσματικός υπόχωρος. Άρα

$$\langle X \cup Y \rangle \subseteq X + Y$$

□

Παράδειγμα 5.26 Θεωρούμε του υποχώρους του $\mathbb{R}^3$,

$$X = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

και

$$Y = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} .$$

Τότε

$$X + Y = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} .$$

Θεωρούμε έναν τρίτο υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$, $Z = \{(z, z, 0) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Είναι τα αθροίσματα $X + Y$, $X + Z$ διαφορετικά ή ίσα; Εύκολα ελέγχουμε οτι κάθε στοιχείο του $X + Y$ ανήκει στο $X + Z$,

$$\begin{aligned} (x, y, 0) &= ((x - y) + y, y, 0) \\ &= (x - y, 0, 0) + (y, y, 0) \in X + Z . \end{aligned}$$

Εξ ίσου εύκολα ελέγχουμε οτι, αντίστροφα, $X + Z \subseteq X + Y$. Συμπεραίνουμε οτι τα δύο αθροίσματα είναι ίσα.

Η γεωμετρική ερμηνεία του συμπεράσματος είναι οτι το επίπεδο που ορίζουν οι ευθείες $\{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ και $\{(y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$, είναι το ίδιο με το επίπεδο που περιέχει τους x και y άξονες.

Παράδειγμα 5.27 Στο σύνολο $C^0(\mathbb{R})$ όλων των συνεχών συναρτήσεων στους πραγματικούς αριθμούς, ονομάζουμε μία συνάρτηση **άρτια** εάν $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και **περιττή** εάν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ελέγξτε οτι τα σύνολα C^0_+ των άρτιων συναρτήσεων και C^0_- των περιττών συναρτήσεων είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $C^0(\mathbb{R})$.

Θα δείξουμε οτι $C^0(\mathbb{R}) = C^0_+ + C^0_-$. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f \in C^0$, και ορίζουμε

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \\ f^-(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) \end{aligned}$$

Ελέγχουμε οτι η f^+ είναι άρτια, η f^- περιττή, και οτι $f = f^+ + f^-$.

Παράδειγμα 5.28 Θεωρούμε τους υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$, $Y = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ και $Z = \{(u,\, v,\, w) \in \mathbb{R}^3 : u + v + w = 0\}$. Το άθροισμα $Y + Z$ είναι όλος ο χώρος $\mathbb{R}^3$. Για οποιοδήποτε διάνυσμα $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(a,\, b,\, c) &= (a,\, (b+c) - c,\, c)\\ &= (a,\, b+c,\, 0) + (0,\, -c,\, c)\end{aligned}$$

με $(a,\, b+c,\, 0) \in Y$, $(0,\, -c,\, c) \in Z$, και επίσης

$$\begin{aligned}(a,\, b,\, c) &= ((a+c) - c,\, b,\, c)\\ &= (a+c,\, b,\, 0) + (-c,\, 0,\, c)\end{aligned}$$

με $(a+c,\, b,\, 0)) \in Y$, $(-c,\, 0\, c) \in Z$. Παρατηρούμε οτι κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^3$ γράφεται με περισσότερους από ένα διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα στοιχείων των Y και Z.

Υποθέτουμε οτι έχουμε διανυσματικούς υπόχωρους Y και Z του διανυσματικού χώρου V, και οτι στο άθροισμα $X = Y + Z$, το στοιχείο $x \in X$ γράφεται ως $x = y_1 + z_1$ και ως $x = y_2 + z_2$, με $y_1,\, y_2 \in Y$, $z_1,\, z_2 \in Z$. Τότε

$$\begin{aligned}0 = x - x &= (y_1 + z_1) - (y_2 + z_2)\\ &= (y_1 - y_2) + (z_1 - z_2)\,.\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε οτι

$$y_1 - y_2 = z_2 - z_1\,.$$

Αλλά το $y_1 - y_2$ ανήκει στο Y ενώ το $z_2 - z_1$ ανήκει στο Z, και εφ' όσον είναι ίσα, ανήκουν στην τομή $Y \cap Z$. Βλέπουμε οτι εάν υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι να εκφραστεί το x ως άθροισμα στοιχείων των Y και Z, τότε $Y \cap Z \neq \{0\}$.

Συμπεραίνουμε οτι εάν $Y \cap Z = \{0\}$, τότε κάθε στοιχείο του $Y + Z$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα στοιχείων του Y και του Z.

Ορισμός 5.5. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V και διανυσματικούς υπόχωρους Y, Z. Εάν $Y \cap Z = \{0\}$, τότε το άθροισμα $Y + Z$ ονομάζεται (**εσωτερικό**) **ευθύ άθροισμα**, και συμβολίζεται $Y \oplus Z$.

Λήμμα 5.6 *Εάν Y και Z είναι υπόχωροι του V με $Y \cap Z = \{0\}$ και $x \in Y \oplus Z$, τότε υπάρχουν μοναδικά διανύσματα $y \in Y$ και $z \in Z$ τέτοια ώστε $x = y + z$.*

Παράδειγμα 5.29 Εάν μία συνάρτηση $f \in C^0(\mathbb{R})$ είναι άρτια και περιττή, τότε $f(x) = f(-x) = -f(x)$. Συμπεραίνουμε οτι η f είναι η σταθερή μηδενική συνάρτηση, και οτι $C^0_+(\mathbb{R}) \cap C^0_-(\mathbb{R}) = \{0\}$. Συνεπώς κάθε συνάρτηση γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης, και το σύνολο $C^0(\mathbb{R})$ είναι το ευθύ άθροισμα των $C^0_+(\mathbb{R})$ και $C^0_-(\mathbb{R})$,

$$C^0(\mathbb{R}) = C^0_+(\mathbb{R}) \oplus C^0_-(\mathbb{R}) .$$

Άσκηση 5.1 Σε ποιά από τα ακόλουθα σύνολα μπορείτε να ορίσετε με ''φυσιολογικό'' τρόπο τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό (για παράδειγμα, κατά σημείο σε ένα χώρο συναρτήσεων), ώστε να είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{R}$; Σε κάθε περίπτωση να ορίσετε τις πράξεις, να βρείτε το μηδενικό διάνυσμα και να ελέγξετε εάν το σύνολο είναι κλειστό ως προς τις πράξεις.

α'. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, $\mathbb{C}$.

β'. Το σύνολο των ρητών αριθμών, $\mathbb{Q}$.

γ'. Το σύνολο των ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

δ'. Το σύνολο όλων των φθινουσών ακολουθιών

ε'. Το σύνολο όλων των ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0.

ϛ'. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από τους φυσικούς αριθμούς στους πραγματικούς αριθμούς.

ζ'. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το σύνολο A στο $\mathbb{R}$, για οποιοδήποτε A.

η'. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο σύνολο A, για οποιοδήποτε A.

θ'. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{Z}$.

ι'. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο $\mathbb{R}^n$, για οποιοδήποτε A.

Άσκηση 5.2 Οταν η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ορίζονται κατά σημείο, ποιά από τα ακόλουθα σύνολα συναρτήσεων αποτελούν διανυσματικούς χώρους πάνω από το $\mathbb{R}$; Σε κάθε περίπτωση να ελέγξετε εάν το σύνολο είναι κλειστό ως προς τις κατά σημείο πράξεις.

α'. Συνεχείς συναρτήσεις από το $[0, 1]$ στο $\mathbb{R}$.

β'. Συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν $f(1) = 0$.

γ'. Συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν $g(0) = 1$.

δ'. Συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $[-1, 1]$.

Άσκηση 5.3 Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^2$ με τις πράξεις $(x, y) \dotplus (x', y') = (x + x', y + y')$ και $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0)$, για $\lambda \in \mathbb{R}$. Εξετάστε εάν αυτές οι πράξεις ορίζουν στο $\mathbb{R}^2$ δομή διανυσματικού χώρου πάνω από το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 5.4 Θεωρούμε διανυσματικό χώρο U, και υποσύνολο $X \subseteq U$. Δείξτε οτι X είναι διανυσματικός υπόχωρος του U εάν και μόνον εάν, για κάθε $x, y \in X$ και κάθε $a \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$ax + y \in X\,.$$

Άσκηση 5.5 Περιγράψτε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$ που παράγεται από τα διανύσματα:
α΄) $(0, 1), (1, 1)$
β΄) $(1, 1), (-1, -1)$
γ΄) $(1, 1), (0, 1), (1, 0)$

Άσκηση 5.6 Περιγράψτε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα

α΄. $(1, 1, -1)$ και $(-1, -1, 1)$.

β΄. $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ και $(0, 0, 0)$.

γ΄. τις στήλες ενός 3×5 κλιμακωτού πίνακα με 2 οδηγούς.

δ΄. όλα τα διανύσματα με θετικές συντεταγμένες.

Άσκηση 5.7 Δίδονται τα διανύσματα $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 2, 1)$, $x = (-2, -3, -2)$ και $y = (0, 1, -3)$ του $\mathbb{R}^3$, και οι διανυσματικοί υπόχωροι $U = \langle u, v\rangle$ και $V = \langle x, y\rangle$. Προσδιορίστε το διανυσματικό υπόχωρο $U \cap V$.

Άσκηση 5.8 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}[x]$ όλων των πολυωνύμων $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, όπου n είναι ο βαθμός του $p(x)$, θεωρούμε το υποσύνολο Q_k των πολυωνύμων βαθμού ίσου με k, και το υποσύνολο $\mathbb{R}[x]_k$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με k. Εξετάστε εάν κάθε ένα από αυτά τα σύνολα αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}[x]$.

Άσκηση 5.9 Θεωρούμε το σύνολο Q των πολυωνύμων $p \in \mathbb{R}[x]$ με την ιδιότητα: η παράγωγος p' διαιρεί το p. Είναι το Q διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$;
Είναι το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές $a_k = 0$ για $k \leq 3$ διανυσματικός υπόχωρος;

Άσκηση 5.10 Θεωρήστε το διανυσματικό χώρο των συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, με πράξεις κατά σημείο.
Είναι το υποσύνολο των συνεχών συναρτήσεων διανυσματικός υπόχωρος;
Είναι το υποσύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν, για κάθε x, $|f(x)| \leq 1$ διανυσματικός υπόχωρος;

Άσκηση 5.11 Γράψτε την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ ως άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης.

Άσκηση 5.12 Δείξτε οτι εάν X και Y είναι διανυσματικοί υπόχωροι του V, τότε $X \cup Y$ είναι διανυσματικός υπόχωρος εάν και μόνον εάν $X \subseteq Y$ ή $Y \subseteq X$.

Άσκηση 5.13 Θεωρούμε υποχώρους X, Y, Z του διανυσματικού χώρου V. Δείξτε οτι εάν $X \subseteq Z$ και $Y \subseteq Z$, τότε $X + Y \subseteq Z$.

Κεφάλαιο 6

Γραμμική ανεξαρτησία, βάσεις, διάσταση

6.1 Γραμμική εξάρτηση

Στο χώρο $T_O E^2$ των γεωμετρικών διανυσμάτων στο επίπεδο με σημείο εφαρμογής στο O, θεωρούμε δύο μη συγγραμμικά διανύσματα, $\vec{u}$ και $\vec{v}$. Εάν $\vec{w}$ είναι οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα του $T_O E^2$, γνωρίζουμε οτι μπορούμε να εκφράσουμε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}$ και $\vec{v}$,

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}\,. \tag{6.1}$$

Συμπεραίνουμε οτι ο χώρος $T_O E^2$ παράγεται από τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$,

$$T_O E^2 = \langle \vec{u},\, \vec{v} \rangle\,.$$

Ποιο σύνολο παράγουν τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$; Ένα διάνυσμα $\vec{z} \in \langle \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w} \rangle$, εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$\vec{z} = c\vec{u} + d\vec{v} + f\vec{w}, \quad \text{για } c,\, d,\, f \in \mathbb{R}$$

αλλά, αντικαθιστώντας το $\vec{w}$ από την 6.1, έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{z} &= c\vec{u} + d\vec{v} + f(a\vec{u} + b\vec{v}) \\ &= (c + fa)\vec{u} + (d + fb)\vec{v}, \end{aligned}$$

δηλαδή $\vec{z} \in \langle \vec{u},\, \vec{v} \rangle$. Συνεπώς ο χώρος που παράγεται από τα $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$ είναι ο ίδιος με αυτόν που παράγεται από τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$. Το $\vec{w}$ δεν προσφέρει κάτι περισσότερο. Με αυτή την έννοια είναι *περιττό*.

Όταν θέλαμε να βρούμε τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$, για τον πίνακα 4.1, δώσαμε σε μία ελεύθερη μεταβλητή την τιμή 1, και στην άλλη την τιμή 0, για να βρούμε μία λύση. Κατόπιν, δώσαμε στην πρώτη ελεύθερη μεταβλητή την τιμή 0 και στην άλλη την τιμή 1, για να βρούμε μία δεύτερη λύση. Δεν χρειάστηκε να υπολογίσουμε τις λύσεις για άλλους συνδυασμούς, για παράδειγμα να δώσουμε την τιμή 1 και στις δύο ελεύθερες μεταβλητές, γιατί όλες οι άλλες λύσεις προκύπτουν ως γραμμικοί συνδυασμοί αυτών των δύο. Μία τρίτη λύση δεν προσφέρει κάτι περισσότερο στο μηδενοχώρο του πίνακα A. Με αυτή την έννοια είναι *περιττή*.

Θεωρούμε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων,

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 5y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

το οποίο μπορούμε να λύσουμε, και να βρούμε το σύνολο των λύσεων

$$U = \{(t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Εάν τώρα θεωρήσουμε μόνο τις δύο πρώτες εξισώσεις, θα δούμε οτι και αυτό το σύστημα έχει ως σύνολο λύσεων το U. Η τρίτη εξίσωση είναι η διαφορά της δεύτερης από την πρώτη, και έτσι δεν βάζει κάποιον επί πλέον περιορισμό στο σύνολο λύσεων. Με αυτή την έννοια, η τρίτη εξίσωση είναι *περιττή*.

Αυτή η έννοια του *περιττού*, διανυσμάτων τα οποία δεν προσφέρουν περισσότερες δυνατότητες παραγωγής, ή εξισώσεων οι οποίες δεν θέτουν περισσότερους περιορισμούς, αποτελεί μία βασική έννοια της Γραμμικής Άλγεβρας, την οποία ονομάζουμε *γραμμική εξάρτηση*. Μια συλλογή διανυσμάτων είναι *γραμμικά εξαρτημένη* όταν περιέχει *περιττά* διανύσματα. Ένα σύστημα εξισώσεων είναι γραμμικά εξαρτημένο όταν περιέχει *περιττές* εξισώσεις.

Ορισμός 6.1. Η *πεπερασμένη* συλλογή[1] διανυσμάτων $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $n \geq 2$, είναι **γραμμικά εξαρτημένη** εάν κάποιο από τα v_i μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Δηλαδή υπάρχει κάποιο j, $1 \leq j \leq n$, και αριθμοί $a_i \in \mathbb{R}$ για κάθε i, με $1 \leq i \leq n$, $i \neq j$, τέτοιοι ώστε

$$v_j = a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \cdots + a_n v_n \,.$$

Παράδειγμα 6.1 Ενα σύνολο k διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το 0, είναι απαραιτήτως γραμμικά εξαρτημένο: εάν $v_1 = 0$ τότε $v_1 = 0v_2 + \cdots + 0v_k$.

[1] Χρησιμοποιούμε τον όρο ‘‘συλλογή’’ σε αντιδιαστολή με το σύνολο, για να συμπεριλάβουμε περιπτώσεις που ένα στοιχείο εμφανίζεται περισσότερες από μία φορές σε μία συλλογή. Τα *σύνολα* $\{1, 1, 2, 3\}$ και $\{1, 2, 3\}$ είναι ίσα, αλλά η συλλογή αριθμών 1, 1, 2, 3 είναι γραμμικά εξαρτημένη, ενώ η συλλογή αριθμών 1, 2, 3 δεν είναι γραμμικά εξαρτημένη.

Παράδειγμα 6.2 Στο $\mathbb{R}^2$, τα διανύσματα $(1,\,0)$, $(0,\,1)$ και $(a,\,b)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού

$$(a,\,b) = a\,(1,\,0) + b\,(0,\,1)\,.$$

Παράδειγμα 6.3 Τα πολυώνυμα $p(x) = 1 - x$, $q(x) = x(1-x)$ και $r(x) = 1 - x^2$, είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού

$$r(x) = p(x) + q(x)\,.$$

Παράδειγμα 6.4 Θεωρούμε τα διανύσματα $x_1 = (2,\,0,\,1)$, $x_2 = (0,\,2,\,-1)$ και $x_3 = (0,\,-4,\,2)$ στο $\mathbb{R}^3$. Είναι προφανές οτι δεν υπάρχουν αριθμοί a_2 και a_3 τέτοιοι ώστε

$$(2,\,0,\,1) = a_2(0,\,2,\,-1) + a_3(0,\,-4,\,2),$$

γιατί $a_2 0 + a_3 0 = 0 \neq 2$. Όμως

$$(0,\,2,\,-1) = 0 \cdot (2,\,0,\,1) - \frac{1}{2}(0,\,-4,\,2)$$

και συνεπώς η συλλογή x_1, x_2, x_3 είναι γραμμικά εξαρτημένη.

Στα προηγούμενα παραδείγματα ήταν εύκολο να βρούμε κάποιο διάνυσμα της συλλογής το οποίο μπορούσαμε να εκφράσουμε ως γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων. Εάν όμως είχαμε μία μεγαλύτερη συλλογή δεν θα ήταν πρακτικό να εξετάσουμε κάθε διάνυσμα, μέχρι να βρούμε κάποιο το οποίο να μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Γι' αυτό το λόγο είναι χρήσιμο να έχουμε ένα χαρακτηρισμό της γραμμικής εξάρτησης που δεν διακρίνει κάποιο από τα στοιχεία. Παρατηρούμε οτι εάν

$$v_j = a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \cdots + a_n v_n$$

τότε

$$a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1} - v_j + a_{j+1} v_{j+1} + \cdots + a_n v_n = 0\,.$$

Δηλαδή, εάν η συλλογή $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένη, τότε το μηδενικό διάνυσμα μπορεί να εκφράστει ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$, με τουλάχιστον ένα συντελεστή διαφορετικό από 0 (στην παραπάνω περίπτωση αυτόν του v_j, ο οποίος είναι -1). Θα δείξουμε οτι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή εάν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$ ο οποίος να είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα, ενώ τουλάχιστον ένας συντελεστής είναι διαφορετικός από το 0, τότε κάποιο από τα v_i μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Λήμμα 6.1 *Η συλλογή διανυσμάτων $v_1, \ldots v_n$, $n \geq 2$, είναι γραμμικά εξαρτημένη εάν και μόνον εάν το μηδενικό διάνυσμα μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$, με τουλάχιστον ένα συντελεστή διαφορετικό από το 0.*

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δείξει τη μία κατεύθυνση. Αντίστροφα, εάν υπάρχει ένας γραμμικός συνδυασμός

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

και $a_j \neq 0$, τότε

$$v_j = \frac{-a_1}{a_j} v_1 + \cdots + \frac{-a_{j-1}}{a_j} + \frac{-a_{j+1}}{a_j} v_{j+1} + \cdots + \frac{-a_n}{a_j} v_n \,.$$

□

Στο ακόλουθο αποτέλεσμα διατυπώνουμε με πιο συγκεκριμένο τρόπο την έννοια υπο την οποία ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο περιέχει περιττά στοιχεία.

Λήμμα 6.2 (Λήμμα Γραμμικής Εξάρτησης) *Θεωρούμε τη γραμμικά εξαρτημένη συλλογή διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$. Εάν υπάρχει μία σχέση*

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

στην οποία ο συντελεστής του v_j δεν είναι ίσος με 0, τότε ο υπόχωρος που παράγεται από το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι ίσος με τον υπόχωρο που παράγεται από το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$.

Απόδειξη. Από την απόδειξη του Λήμματος 6.1 γνωρίζουμε οτι μπορούμε να εκφράσουμε το v_j ως γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων διανυσμάτων, έστω

$$v_j = \sum_{i \neq j} b_i v_i \,.$$

Εάν $w = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το v_j, και να πάρουμε

$$w = \sum_{i \neq j} (a_i + a_j b_i) v_i \,,$$

που σημαίνει οτι το w βρίσκεται στον υπόχωρο που παράγεται από το

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_j\} \,.$$

□

Επεκτείνουμε τον ορισμό της γραμμικής εξάρτησης σε αυθαίρετες συλλογές διανυσμάτων με τον ακόλουθο τρόπο. Η *κενή* συλλογή διανυσμάτων, δηλαδή η συλλογή που δεν περιέχει κανένα διάνυσμα, δεν είναι γραμμικά εξαρτημένη. Η συλλογή που περιέχει μόνον ένα διάνυσμα είναι γραμμικά εξαρτημένη μόνον εάν αυτό είναι το μηδενικό διάνυσμα. Μια *άπειρη* συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένη εάν περιέχει κάποια πεπερασμένη συλλογή διανυσμάτων η οποία είναι γραμμικά εξαρτημένη.

6.2 Γραμμική ανεξαρτησία

Μία συλλογή διανυσμάτων είναι **γραμμικά ανεξάρτητη** εάν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένη. Για μία πεπερασμένη συλλογή $v_1, \ldots, v_n$, $n \geq 2$, αυτό σημαίνει οτι κανένα στοιχείο της συλλογής δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Παράδειγμα 6.5 Δύο μη συγγραμμικά γεωμετρικά διανύσματα του επιπέδου, $\vec{u}$, $\vec{v} \in T_O E^2$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εφ' όσον τα $\vec{u}$, $\vec{v}$ δεν είναι συγγραμμικά, το ένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

Παράδειγμα 6.6 Στο $\mathbb{R}^2$, τα διανύσματα $(1,0)$, $(0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Δεν υπάρχει στοιχείο a του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $(1,0) = a(0,1)$ ή $(0,1) = a(1,0)$, γιατί $a0 = 0$.

Παράδειγμα 6.7 Τα πολυώνυμα $p(x) = 1 - x$, $q(x) = x(1-x)$ και $s(x) = x^3 - 1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εάν οι αριθμοί a, b, c ικανοποιούν τη σχέση

$$a\,(1-x) + b\,x(1-x) + c\,(x^3 - 1) = 0$$

τότε

$$c\,x^3 - b\,x^2 + (b-a)\,x + (a-c)$$

είναι το μηδενικό πολυώνυμο, και συνεπώς $c = 0$, $b = 0$, $b - a = 0$, και άρα $a = 0$. Συμπεραίνουμε οτι ο μόνος τρόπος να εκφραστεί το μηδενικό πολυώνυμο ως γραμμικός συνδυασμός των $p(x)$, $q(x)$ και $s(x)$, είναι ο τετριμμένος,

$$0\,p(x) + 0\,q(x) + 0\,s(x) = 0\,.$$

Άρα τα πολυώνυμα $p(x)$, $q(x)$, $s(x)$ δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Σύμφωνα με την επέκταση της έννοιας της γραμμικής εξάρτησης σε αυθαίρετες συλλογές, η κενή συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητη, ενώ η συλλογή με ένα διάνυσμα είναι γραμμικά ανεξάρτητη εκτός εάν αυτό είναι το μηδενικό διάνυσμα. Μία άπειρη συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητη εάν κάθε πεπερασμένη συλλογή διανυσμάτων που περιέχεται σε αυτήν είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

Ο *συμμετρικός* χαρακτηρισμός της γραμμικής εξάρτησης στο Λήμμα 6.1 επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε και τη γραμμική ανεξαρτησία με *συμμετρικό* τρόπο.

Λήμμα 6.3 *Η συλλογή διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$, $n \geq 1$, είναι γραμμικά ανεξάρτητη εάν και μόνον εάν ο μοναδικός τρόπος να εκφραστεί το μηδενικό διάνυσμα ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$ είναι ο τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός, με όλους τους συντελεστές ίσους με 0.*

Απόδειξη. Η πρόταση είναι αντιστροφοαντίθετη, και συνεπώς λογικά ισοδύναμη, με το Λήμμα 6.1.

□

Για να ελέγξουμε εάν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, σχηματίζουμε τον $m \times n$ πίνακα με στήλες $v_1, \ldots, v_n$. Εάν υπάρχει ένα *μη μηδενικό διάνυσμα* $c = (c_1, \ldots, c_n)$ τέτοιο ώστε $Ac = 0$, τότε οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά εξαρτημένες. Εάν η μοναδική λύση της $Ax = 0$ είναι η τετριμμένη, $x = 0 \in \mathbb{R}^n$, τότε οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ειδικότερα, οι στήλες ενός τριγωνικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες εάν και μόνον εάν όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο είναι διαφορετικά από το 0.

Πρόταση 6.4 *Σε ένα πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, οι μη μηδενικές γραμμές είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Το ίδιο ισχύει για τις στήλες που περιέχουν οδηγούς.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα $m \times n$ πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, με r μη μηδενικές γραμμές, και οδηγούς στις στήλες $j_1, j_2, \ldots, j_r$. Συμβολίζουμε U τον $r \times n$ πίνακα που αποτελείται από τις μη μηδενικές γραμμές, και $c = (c_1, \ldots, c_r)$ ένα διάνυσμα τέτοιο ώστε $c^T U = 0$. Θέλουμε να δείξουμε οτι $c = 0$.

Εξετάζουμε τη στήλη j_1. Το στοιχείο $a_{1j_1} \neq 0$, ενώ όλα τα υπόλοιπα είναι 0. Αρα $c_1 a_{1j_1} = 0$ και συνεπώς $c_1 = 0$.

Υποθέτουμε τώρα οτι $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$, για $k < r$, και θα δείξουμε οτι $c_{k+1} = 0$.

Εξετάζουμε τη στήλη j_{k+1}. Το στοιχείο $a_{(k+1)j_{k+1}} \neq 0$, ενώ για $p > k+1$, $a_{pj_{k+1}} = 0$. Αρα $c_{k+1} a_{(k+1)j_{k+1}} = 0$ και συνεπώς $c_{k+1} = 0$.

Για να αποδείξουμε οτι οι στήλες που περιέχουν οδηγούς είναι γραμμικά ανεξάρτητες, εξετάζουμε λύσεις της εξίσωσης $Ux = 0$ για τις οποίες όλες οι ελεύθερες μεταβλητές είναι 0. Η ανάδρομη αντικατάσταση τότε δίδει τη μοναδική λύση $x = 0$.

□

Πόρισμα 6.5 *Εάν $n > m$ ένα σύνολο n διανυσμάτων στο χώρο $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

Παράδειγμα 6.8 Στο χώρο $C^0(\mathbb{R})$, θεωρούμε τις συναρτήσεις sin και cos. Εάν η μηδενική συνάρτηση εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$a(\sin) + b(\cos) = 0$$

τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα

$$a \sin x + b \cos x = 0\,.$$

Ειδικότερα εάν $x = 0$ έχουμε $a \sin 0 + b \cos 0 = 0$, δηλαδή $b = 0$ και εάν $x = \frac{\pi}{2}$ έχουμε $a \sin \frac{\pi}{2} + b \cos \frac{\pi}{2} = 0$, δηλαδή $a = 0$. Συμπεραίνουμε οτι ο μόνος τρόπος να εκφραστεί η μηδενική συνάρτηση ως γραμμικός συνδυασμός των sin και cos είναι με όλους τους συντελεστές ίσους με 0. Συνεπώς οι συναρτήσεις sin και cos είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Πρόταση 6.6 *Εάν μία συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένη, τότε κάθε συλλογή που την περιέχει είναι επίσης γραμμικά εξαρτημένη. Εάν μία συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητη, τότε κάθε συλλογή που περιέχεται σε αυτήν είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητη.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συλλογή διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$, $w_1, \ldots, w_m$. Εάν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, υπάρχουν αριθμοί, $a_1, \ldots, a_n$, οι οποίοι δεν είναι όλοι ίσοι με 0, τέτοιοι ώστε

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0\,.$$

Σχηματίζουμε το γραμμικό συνδυασμό

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n + 0 w_1 + \cdots + 0 w_m$$

ο οποίος είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα, αλλά τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές δεν είναι 0. Άρα η συλλογή $v_1, \ldots, v_n$, $w_1, \ldots, w_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένη.

Θεωρούμε μια γραμμικά ανεξάρτητη συλλογή διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$, και τη συλλογή $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$, όπου $k \leq n$ και i_j είναι διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί μεταξύ 1 και n. Θέλουμε να δείξουμε οτι η συλλογή $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Έστω ένας γραμμικός συνδυασμός των $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$, ο οποίος είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα,

$$a_1 v_{i_1} + \cdots + a_k v_{i_k} = 0\,.$$

Σχηματίζουμε το γραμμικό συνδυασμό

$$b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

όπου $b_{i_j} = a_j$ για $j = 1, \ldots k$, και $b_i = 0$ εάν i δεν είναι ίσο με κάποιο i_j, $1 \leq j \leq k$. Τότε

$$b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n = a_1 v_{i_1} + \cdots + a_k v_{i_k} = 0$$

Αφού η συλλογή $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη, όλοι οι συντελεστές b_i, $1 \leq i \leq n$ είναι ίσοι με 0. Συνεπώς και οι $a_j = b_{i_j}$ είναι ίσοι με 0. Άρα η συλλογή $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

□

Παράδειγμα 6.9 Στο χώρο $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων μίας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές το σύνολο

$$\mathcal{B} = \left\{ p_k(x) = x^k : k \in \mathbb{N}_0 \right\} = \{p_0(x),\, p_1(x),\, p_2(x), \ldots\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Πρέπει να δείξουμε οτι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Από την Πρόταση 6.6, κάθε υποσύνολο ενός γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αφού κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{B}$ περιέχεται σε ένα υποσύνολο της μορφής $\{p_0(x),\, p_1(x),\, p_2(x), \ldots,\, p_n(x)\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, αρκεί να αποδείξουμε οτι σύνολα αυτής της μορφής είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Θεωρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό που εκφράζει το μηδενικό πολυώνυμο:

$$a_0\, p_0(x) + a_1\, p_1(x) + a_2\, p_2(x) + \cdots + a_n p_n(x) = 0$$

δηλαδή $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο και συνεπώς $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα οτι το μηδενικό διάνυσμα εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του συνόλου. Θα δούμε οτι το ίδιο ισχύει και για κάθε άλλο διάνυσμα που βρίσκεται στο χώρο που παράγει το σύνολο.

Πρόταση 6.7 *Το σύνολο διανυσμάτων $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο εάν και μόνον εάν κάθε διάνυσμα $w \in \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ εκφράζεται κατά ένα και μόνο τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θεωρούμε διάνυσμα $w \in \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$, και γραμμικούς συνδυασμούς που εκφράζουν το w,

$$w = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \quad \text{και} \quad w = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

Τότε $a_1 v_1 + \cdots a_n v_n - (b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) = 0$, και συνεπώς

$$(a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n = 0\,.$$

Αφού το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο,

$$a_1 - b_1 = 0,\, a_2 - b_2 = 0, \ldots,\, a_n - b_n = 0\,,$$

και συνεπώς $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots,\, a_n = b_n$. Συμπεραίνουμε οτι το w εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε οτι κάθε διάνυσμα $w \in \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$. Το μηδενικό διάνυσμα ανήκει στο $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$, και προφανώς $0 = 0\, v_1 + \cdots + 0\, v_n$. Από την υπόθεση της μοναδικότητας δεν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός με τουλάχιστον ένα συντελεστή διαφορετικό από 0 που να εκφράζει το μηδενικό διάνυσμα, και συνεπώς το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

□

Το επόμενο Λήμμα είναι χρήσιμο σε αποδείξεις: εάν βάλουμε τα στοιχεία ενός γραμμικά εξαρτημένου συνόλου σε μία διάταξη, μπορούμε να διακρίνουμε το πρώτο στοιχείο που γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των προηγουμένων του.

Λήμμα 6.8 *Εάν το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο και $v_1 \neq 0$, τότε υπάρχει k, με $1 \leq k < n$, τέτοιο ώστε το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και υπάρχουν αριθμοί $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $v_{k+1} = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$.*

Απόδειξη. Το σύνολο $\{v_1\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αφού το $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, υπάρχει κάποιο ελάχιστο k τέτοιο ώστε $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Αφού το k είναι το ελάχιστο με αυτή την ιδιότητα, το σύνολο $\{v_1, \dots, v_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Υπάρχουν $b_1, \dots, b_{k+1} \in \mathbb{R}$, όχι όλα ίσα με μηδέν, τέτοια ώστε $b_1v_1 + \cdots + b_{k+1}v_{k+1} = 0$. Εάν $b_{k+1} = 0$, τότε $b_1v_1 + \cdots + b_kv_k = 0$ και από γραμμική ανεξαρτησία $b_1 = \cdots = b_k = 0$. Άρα $b_{k+1} \neq 0$, και συνεπώς

$$v_{k+1} = -\frac{b_1}{b_{k+1}}v_1 - \cdots - \frac{b_k}{b_{k+1}}v_k\,.$$

□

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι κάπως τεχνικό, αλλά θεμελιώδες για τη θεωρία των πεπερασμένα παραγόμενων διανυσματικών χώρων. Λέει οτι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο δεν μπορεί να έχει περισσότερα στοιχεία από ένα σύνολο που παράγει το χώρο, και οτι μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάποια από τα στοιχεία του παράγοντος συνόλου με τα στοιχεία του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου ώστε να έχουμε ένα νέο παράγον σύνολο που περιέχει το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

Θεώρημα 6.9 *(Θεώρημα Αντικατάστασης). Εάν το πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, \dots, v_n\}$ παράγει το διανυσματικό χώρο V, και $\{w_1, \dots, w_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V, τότε $k \leq n$ και υπάρχουν $n-k$ στοιχεία v_{i_j}, για $j = 1, \dots, n-k$ τέτοια ώστε*

$$\{w_1, \dots, w_k, v_{i_1}, \cdots, v_{i_{n-k}}\}$$

παράγουν το V.

Απόδειξη. Αφού το σύνολο $\{v_1, \dots, v_n\}$ παράγει το διανυσματικό χώρο V, το w_1 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$w_1 = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n\,,$$

και εφόσον $w_1 \neq 0$, υπάρχει κάποιο $j \in \{1, \dots, n\}$ για το οποίο $a_j \neq 0$. Αντικαθιστούμε το v_j με το w_1, και έχουμε το σύνολο

$$S_1 = (\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_j\}) \cup \{w_1\}\,.$$

Από το Λήμμα Γραμμικής Εξάρτησης, Λήμμα 6.2, το S_1 παράγει το χώρο V. Αν χρειάζεται αλλάζουμε την αρίθμηση των στοιχείων του S_1 ώστε να έχουμε

$$S_1 = \{w_1, v_2, \dots, v_n\}\,.$$

Κατόπιν θεωρούμε το διάνυσμα w_2. Αφού το S_1 παράγει το V, το w_2 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S_1,

$$w_2 = a_1w_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n\,.$$

Αφού τα w_1, w_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $w_2 - a_1 w_1 \neq 0$, και συνεπώς υπάρχει κάποιο $j \in \{2, \ldots, n\}$ για το οποίο $a_j \neq 0$. Θέτουμε $S_2 = (S_1 \setminus \{v_j\}) \cup \{w_2\}$, και αλλάζουμε την αρίθμηση ώστε να έχουμε

$$S_2 = \{w_1, w_2, v_3, \ldots, v_n\}.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο υποθέτουμε οτι, για $m < k$, έχουμε κατασκευάσει το σύνολο $S_m = \{w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$, το οποίο παράγει το V. Θεωρούμε το διάνυσμα w_{m+1} ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του S_m, και έχουμε

$$w_{m+1} - (a_1 w_1 + \ldots + a_m w_m) = a_{m+1} v_{m+1} + \ldots + a_n v_n .$$

Αφού τα $w_1, \ldots, w_{m+1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, η δεξιά πλευρά δεν είναι ίση με το μηδενικό διάνυσμα. Συνεπώς $m < n$ και υπάρχει $j \in \{m+1, \ldots, n\}$ τέτοιο ώστε $a_j \neq 0$. Συμπεραίνουμε οτι το σύνολο $S_{m+1} = (S_m \setminus \{v_j\}) \cup \{w_{m+1}\}$ παράγει το V.

Αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί μέχρι να εξαντλήσουμε τα στοιχεία του συνόλου $\{w_1, \ldots, w_k\}$ και να κατασκευάσουμε το σύνολο

$$S_k = \{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\},$$

το οποίο παράγει το διανυσματικό χώρο V.

□

Πόρισμα 6.10 *Ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο σε ένα διανυσματικό χώρο δεν μπορεί να έχει περισσότερα στοιχεία από ένα σύνολο που παράγει το χώρο.*

□

Άσκηση 6.1 Δείξτε οτι εάν $a = 0$ ή $d = 0$ ή $f = 0$, τότε οι στήλες του U είναι γραμμικά εξαρτημένες:

$$U = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Άσκηση 6.2 Εάν τα a, d, f στην Άσκηση 6.1 είναι όλα διαφορετικά από το 0, τότε η μόνη λύση της εξίσωσης $Ux = 0$ είναι $x = 0$. Οι στήλες του U είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Άσκηση 6.3 Εξετάστε εάν είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα διανύσματα:

α΄) $(0, 1)$, $(1, 1)$

β΄) $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$

γ΄) $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$

Άσκηση 6.4 Δείξτε οτι τα διανύσματα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αλλά οτι τα u_1, u_2, u_3, u_4 είναι γραμμικά εξαρτημένα:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6.5 α΄) Αποφασίστε εάν τα ακόλουθα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή όχι, λύνοντας ένα κατάλληλο σύστημα $Ax = 0$.

$$(1,\, 1,\, 0,\, 0) \quad , \quad (1,\, 0,\, 1,\, 0) \quad , \quad (0,\, 0,\, 1,\, 1) \quad , \quad (0,\, 1,\, 0,\, 1)\,.$$

β΄) Ελέγξτε εάν το διάνυσμα $(0,\, 0,\, 0,\, 1)$ βρίσκεται στο χώρο που παράγουν τα παραπάνω διανύσματα.

Άσκηση 6.6 Εάν w_1, w_2, w_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, δείξτε οτι οι διαφορές $u_1 = w_2 - w_3$, $u_2 = w_1 - w_3$ και $u_3 = w_1 - w_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένες. Βρείτε ένα γραμμικό συνδυασμό των u_1, u_2, u_3 που δίδει 0.

Άσκηση 6.7 Εάν w_1, w_2, w_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, δείξτε οτι τα αθροίσματα $v_1 = w_2 + w_3$, $v_2 = w_1 + w_3$ και $v_3 = w_1 + w_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εκφράστε τη σχέση $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ ως προς τα w_i, και βρείτε εξισώσεις για τα c_i.

Άσκηση 6.8 Υποθέστε οτι τοποθετούμε τα διανύσματα των οποίων θέλουμε να ελέγξουμε τη γραμμική ανεξαρτησία, στις γραμμές και όχι στις στήλες ενός πίνακα. Πως μπορούμε να συμπεράνουμε εάν είναι γραμμικά ανεξάρτητα κατά τη διάρκεια της απαλοιφής από τον A στον U;

Άσκηση 6.9 Θεωρήστε διανυσματικό χώρο X και διανύσματα $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m \in X$. Δείξτε οτι εάν $x_i = 0$ για κάποιο i, τότε τα $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Δείξτε οτι εάν $x_i = x_j$ για κάποιο i και j, με $i \neq j$, τότε τα $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Άσκηση 6.10 Δείξτε οτι εάν το σύνολο $\{v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε το ίδιο ισχύει και για το $\{v_1 - v_2,\, v_2 - v_3,\, \ldots,\, v_{n-1} - v_n,\, v_n\}$.

Άσκηση 6.11 Δίδονται τρία διανύσματα $u_1,\, u_2,\, u_3 \in V$. Δείξτε οτι εάν $\langle u_1,\, u_2 \rangle = \langle u_2,\, u_3 \rangle$, τότε τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα.
Ισχύει το αντίστροφο;

Άσκηση 6.12 Δείξτε οτι στο χώρο $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο με n στοιχεία.

Άσκηση 6.13 Θεωρήστε το διανυσματικό χώρο $C^0(\mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, με πράξεις κατά σημείο.
Δείξτε οτι τα στοιχεία $f_1, f_2, \ldots, f_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όπου $f_k(x) = \sin(kx)$.

Βάσεις

Εάν ένα υποσύνολο S του διανυσματικού χώρου V παράγει το V, τότε κάθε στοιχείο του V εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S. Εάν επί πλέον το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε αυτός ο γραμμικός συνδυασμός είναι μοναδικός για κάθε στοιχείο του V. Γι' αυτό το λόγο ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο που παράγει ένα χώρο V έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Ένα τέτοιο σύνολο ονομάζεται βάση του V.

Ορισμός 6.2. Ένα υποσύνολο $\mathcal{B}$ του διανυσματικού χώρου V λέγεται **βάση** του V εάν το $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει το διανυσματικό χώρο V.

Παράδειγμα 6.10 Στο $\mathbb{R}^2$, τα διανύσματα $(1,\, 0)$ και $(0,\, 1)$ αποτελούν μία βάση του χώρου, γιατί είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν το χώρο $\mathbb{R}^2$: εάν $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$, τότε $(a,\, b) = a\,(1,\, 0) + b\,(0, 1)$.

Παράδειγμα 6.11 Η **κανονική** βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι η βάση $e_1, \ldots, e_n$, η οποία αποτελείται από τις στήλες του μοναδιαίου πίνακα. Όμως η βάση αυτή δεν είναι κατά κανένα τρόπο μοναδική. Οι *στήλες κάθε αντιστρέψιμου* $n \times n$ *πίνακα* αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 6.12 Οι στήλες ενός κλιμακωτού πίνακα δεν είναι πάντα γραμμικά ανεξάρτητες, αλλά παράγουν το χώρο στηλών. Ο *στήλες που περιέχουν τους οδηγούς* αποτελούν μία βάση του χώρου στηλών του πίνακα. Θα το δούμε αυτό στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.13 Θεωρούμε τον κλιμακωτό πίνακα

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι στήλες που περιέχουν οδηγούς είναι οι $(1,\, 0,\, 0)$ και $(3,\, 3,\, 0)$. Ελέγχουμε οτι είναι γραμμικά ανεξάρτητες: από την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

έχουμε $c_1 + 3c_2 = 0$ και $3c_2 = 0$, και συνεπώς $c_2 = 0$, $c_1 = 0$.

Για να δείξουμε οτι οι στήλες με οδηγούς παράγουν το χώρο στηλών, αρκεί να ελέγξουμε οτι οι υπόλοιπες στήλες εκφράζονται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών που περιέχουν οδηγούς.

Στον πίνακα U του παραδείγματος, εάν $v_1, \ldots, v_4$ είναι οι στήλες του U, παρατηρούμε οτι οι στήλες v_2 και v_4 εκφράζονται ως γραμμικός συνδυασμός των v_1 και v_3:

$$v_2 = 3v_1 \quad \text{και} \quad v_4 = \frac{1}{3}v_3 + v_1.$$

Παράδειγμα 6.14 Το σύνολο

$$\mathcal{B} \;=\; \{p_k(x) = x^k : k \in \mathbb{N}_0\}$$

αποτελεί βάση του χώρου πολυωνύμων $\mathbb{R}[x]$. Είδαμε στο Παράδειγμα 6.9 οτι είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο γράφεται στη μορφή $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, με $a_n \neq 0$, και συνεπώς εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $\mathcal{B}$:

$$p(x) = a_0p_0(x) + a_1p_1(x) + \ldots + a_np_n(x)\,.$$

Μία βάση ενός διανυσματικού χώρου V χαρακτηρίζεται ως ένα μέγιστο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V, και επίσης ως ένα ελάχιστο παράγον σύνολο του V.

Πρόταση 6.11 *Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο V, και ένα σύνολο $\{v_1, \ldots v_n\} \subseteq V$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

1. *$\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι βάση του V, δηλαδή είναι γραμμικά ανεξάρτητο παράγον σύνολο του V.*
2. *Κάθε διάνυσμα $w \in V$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$.*
3. *$\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αλλά για κάθε $w \in V \setminus \{v_1, \ldots, v_n\}$, το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\} \cup \{w\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.*
4. *$\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι παράγον σύνολο V, ενώ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_i\}$ δεν παράγει το V.*

Απόδειξη. Η ισοδυναμία των 1 και 2 είναι συνέπεια της Πρότασης 6.7.

Για να δείξουμε οτι το 1 συνεπάγεται το 3, παρατηρούμε οτι εάν $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι βάση και $w \in V \setminus \{v_1, \ldots, v_n\}$, τότε το w εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$, και συνεπώς $\{v_1, \ldots, v_n\} \cup \{w\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Αντιστρόφως, εάν ισχύει το 3, τότε κάθε στοιχείο $w \in V$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$, και συνεπώς $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο παράγον σύνολο.

Για να δείξουμε οτι το 1 συνεπάγεται το 4, παρατηρούμε οτι εάν για κάποιο $j = 1, \ldots, n$, το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_j\}$ παράγει το V, τότε το v_j εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων στοιχείων του $\{v_1, \ldots, v_n\}$, το οποίο συνεπώς δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αντιστρόφως, εάν το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ παράγει το V, αλλά δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε, από το Λήμμα Γραμμικής Εξάρτησης, Λήμμα 6.2, υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του $\{v_1, \ldots, v_n\}$ το οποίο παράγει το V.

□

Στην επόμενη Πρόταση δείχνουμε οτι σε έναν πεπερασμένα παραγόμενο διανυσματικό χώρο, όλες οι βάσεις έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Πρόταση 6.12 *Εάν $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ είναι βάσεις ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου, τότε $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Αντικατάστασης, Θεώρημα 6.9, και οι δύο βάσεις έχουν πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Υποθέτουμε οτι $\mathcal{B}$ έχει n στοιχεία και η $\mathcal{B}'$ έχει n' στοιχεία. Αφού το σύνολο $\mathcal{B}'$ παράγει το διανυσματικό χώρο, και $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, $n \leq n'$. Παρόμοια το $\mathcal{B}$ παράγει το χώρο και το $\mathcal{B}'$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα $n' \leq n$. Συνεπώς $n = n'$.

□

6.3 Διάσταση

Ορισμός 6.3. Έστω διανυσματικός χώρος V. Η **διάσταση** του V συμβολίζεται $\dim V$ και ορίζεται ως εξής:

$$\dim V = \begin{cases} 0 & \text{εάν } V = \{0\} \\ n & \text{εάν υπάρχει βάση του } V \text{ με } n \text{ στοιχεία} \\ \infty & \begin{array}{l}\text{εάν για κάθε } m \in \mathbb{N}, \text{ υπάρχει γραμμικά} \\ \text{ανεξάρτητο υποσύνολο του } V \text{ με } m \text{ στοιχεία}\end{array} \end{cases}$$

Λέμε οτι ο διανυσματικός χώρος V έχει **πεπερασμένη διάσταση** εάν $\dim V \in \mathbb{N}_0$, ενώ ονομάζουμε **απειροδιάστατο** ένα χώρο για τον οποίο $\dim V = \infty$.

Παράδειγμα 6.15 Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ τα διανύσματα e_j για $j = 1, 2, \ldots, n$, τα οποία έχουν 1 στη θέση j και 0 σε όλες τις άλλες θέσεις. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό δ_{ij} του Kronecker, όπου

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{εάν } i = j \\ 0 & \text{εάν } i \neq j \end{cases}$$

έχουμε $e_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \ldots, \delta_{nj})$. Το σύνολο $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^n$, η οποία ονομάζεται **κανονική βάση** του $\mathbb{R}^n$.

Αφού μία βάση είναι μέγιστο γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο και ελάχιστο παράγον σύνολο, άμεση συνέπεια του ορισμού της διάστασης είναι η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 6.13 *Έστω διανυσματικός χώρος V διάστασης n. Τότε*

1. *Κανένα σύνολο με περισσότερα από n στοιχεία δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο στο V.*
2. *Κανένα σύνολο με λιγότερα από n στοιχεία δεν παράγει το V.*

□

Θεώρημα 6.14 *Έστω διανυσματικός χώρος V διάστασης n, και S υποσύνολο του V με n στοιχεία. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *S είναι γραμμικά ανεξάρτητο στο V.*
2. *S παράγει το διανυσματικό χώρο V.*
3. *S είναι βάση του V.*

Απόδειξη. Σε ένα διανυσματικό χώρο διάστασης n, ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο με n στοιχεία είναι μέγιστο, και συνεπώς είναι μία βάση, ενώ ένα παράγον σύνολο με n στοιχεία είναι ελάχιστο, και συνεπώς είναι μία βάση.

□

Πρόταση 6.15 *Έστω διανυσματικός χώρος V διάστασης n, και $\{v_1, \ldots, v_n\}$ βάση του V. Εάν $\{w_1, \ldots, w_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V, τότε υπάρχουν $n-k$ στοιχεία v_{i_j}, για $j = 1, \ldots, n-k$, τέτοια ώστε*

$$\{w_1, \ldots, w_k, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-k}}\}$$

είναι βάση του V.

Απόδειξη. Απο το Θεώρημα Αντικατάστασης, Θεώρημα 6.9, υπάρχουν v_{i_j} τέτοια ώστε $\{w_1, \ldots, w_k, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-k}}\}$ παράγει το V. Από το Θεώρημα 6.14, ένα παράγον σύνολο του V με n στοιχεία είναι βάση του V.

□

Άσκηση 6.14 Βρείτε δύο βάσεις του $\mathbb{R}^4$, που δεν περιέχουν κοινά διανύσματα, τέτοιες ώστε η μία να περιέχει τα διανύσματα $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$ και η άλλη τα διανύσματα $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$.

Άσκηση 6.15 Δείξτε οτι τα διανύσματα $u_1 = (0, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0, 1)$ και $u_4 = (1, 1, 1, 0)$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^4$. Εκφράστε το διάνυσμα $u = (1, 1, 1, 1)$ ως γραμμικό συνδυασμό των u_1, u_2, u_3, u_4.
Το ίδιο για το $w = (1, 0, 0, 0)$.

Άσκηση 6.16 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^4$ θεωρούμε τους υπόχωρους

$$U = \{(z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4) \,|\, z_1 = z_2,\, z_4 = 0\}$$

$$W = \langle (1,\, 0,\, 0,\, 0),\, (\mathrm{i},\, 1,\, 0,\, 0),\, (0,\, \mathrm{i},\, 1,\, 0) \rangle\,.$$

1. Δείξτε οτι $U \subseteq W$.

2. Βρείτε μία βάση του W η οποία να περιέχει μία βάση του U. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Αντικατάστασης. Στη δοθείσα βάση $w_1,\, w_2,\, w_3$ του W μπορείτε να προσθέσετε ένα στοιχείο της βάσης του U, και κατόπιν να αφαιρέσετε ένα στοιχείο το οποίο γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, έστω $w_1 = a\,u_1 + b\,w_2 + c\,w_3$. Επαναλαμβάνοντας παίρνουμε τη ζητούμενη βάση, $u_1,\, u_2,\, w_3$.)

Άσκηση 6.17 Στο χώρο $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{R}$, θεωρούμε τον υπόχωρο $\mathbb{R}[x]_k$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με k. Δείξτε οτι εάν $\deg p = k$, τότε η συλλογή $p,\, p',\, p'', \ldots, p^{(k)}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}[x]_k$. Εάν $a \in \mathbb{R}$, εκφράστε το πολυώνυμο $q(x) = p(x+a)$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων αυτής της βάσης.

Άσκηση 6.18 Υποθέστε οτι X είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, και Y είναι υπόχωρος του X. Δείξτε οτι εάν $\dim Y = \dim X$, τότε $Y = X$.
Βρείτε ένα παράδειγμα για να δείξετε οτι το συμπέρασμα δεν ισχύει εάν ο χώρος X είναι απειροδιάστατος.

Άσκηση 6.19 . Δίδονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$,

$$U = \{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \,|\, x_1 = 2x_4,\, x_2 = x_3\}$$

και

$$V = \{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \,|\, x_1 = x_4 = 0\}\,.$$

Βρείτε μία βάση του χώρου $U + V$.

Άσκηση 6.20 Βρείτε μία βάση του διανυσματικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^5$,

$$V = \{(x_1,\, \ldots,\, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 = 3x_2,\, x_3 = 7x_4\}\,.$$

Άσκηση 6.21 Δείξτε οτι το $\mathbb{C}$, θεωρούμενο ως διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$, έχει διάσταση 2. Για ποιά $z \in \mathbb{C}$ αποτελεί το σύνολο $\{z,\, \bar{z}\}$ βάση του $\mathbb{C}$ πάνω από το $\mathbb{R}$;
Για ένα τέτοιο $z = a + \mathrm{i}b$, εκφράστε το $x + iy$ ως γραμμικό συνδυασμό των $z,\, \bar{z}$.

Άσκηση 6.22 Έστω διανυσματικός χώρος V πάνω από το $\mathbb{R}$, και βάση του V, $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + 2u_2 + au_3 + u_4 \\ v_2 &= au_1 + u_2 + 2u_3 + 3u_4 \\ v_3 &= u_2 + bu_3 \,. \end{aligned}$$

1. Προσδιορίστε τους αριθμούς a και b έτσι ώστε τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 να είναι γραμμικά εξαρτημένα.

2. Βρείτε τη διάσταση του υπόχωρου $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ που παράγεται από τα v_1, v_2 και v_3 και προσδιορίστε μία βάση του.

Άσκηση 6.23 Δείξτε οτι εάν τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και $y \notin \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, τότε τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 6.24 Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$, και $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ μία βάση του V. Εξετάστε εάν το σύνολο

$$\mathcal{B}' = \{v_1, v_1 + v_2, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_n\}$$

είναι βάση του V.
Ίδιο ερώτημα για το

$$\mathcal{B}'' = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1\} \,.$$

Άσκηση 6.25 Πολυώνυμα Tchebychev ονομάζονται τα πολυώνυμα T_n, για $n = 0, 1, 2, \ldots$, τα οποία εκφράζουν το $\cos n\vartheta$ ως πολυώνυμο του $x = \cos\vartheta$.

1. Δείξτε οτι ικανοποιείται η επαγωγική σχέση

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \,.$$

   και συμπεράνετε οτι T_n είναι πολυώνυμο βαθμού n.

2. Δείξτε οτι $T_0, T_1, \ldots, T_n$ αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{P}_n$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με n.

6.4 Οι τέσσερεις Θεμελιώδεις Υπόχωροι ενός πίνακα.

Μέχρι τώρα έχουμε δεί παραδείγματα βάσεων, αλλά δεν έχουμε ένα τρόπο να υπολογίσουμε τα στοιχεία μίας βάσης για οποιοδήποτε διανυσματικό χώρο. Στη συνέχεια θα δούμε πώς να υπολογίσουμε βάσεις για διανυσματικούς υποχώρους του $\mathbb{R}^n$.

Έχουμε δεί δύο τρόπους να περιγράψουμε ένα διανυσματικό υπόχωρο. Μπορεί να γνωρίζουμε ένα σύνολο διανυσμάτων που παράγουν τον υπόχωρο, όπως ο χώρος στηλών, που παράγεται από τις στήλες ενός πίνακα. Διαφορετικά, μπορεί να γνωρίζουμε συνθήκες τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν τα διανύσματα του υποχώρου, όπως ο μηδενοχώρος ενός πίνακα A, που αποτελείται από τα διανύσματα που ικανοποιούν τις συνθήκες $Ax = 0$.

Στην πρώτη περίπτωση, μπορεί να περιέχονται περιττά διανύσματα στο σύνολο που παράγει τον υπόχωρο. Στη δεύτερη περίπτωση μπορεί να περιλαμβάνονται περιττές εξισώσεις στις συνθήκες που προσδιορίζουν τον υπόχωρο.

Θα οργανώσουμε τη συζήτηση γύρω από τους τέσσερεις θεμελιώδεις υποχώρους που σχετίζονται με έναν $m \times n$ πίνακα.

Έχουμε ήδη δεί το μηδενόχωρο και το χώρο στηλών ενός πίνακα A. Θα ορίσουμε άλλους δύο χώρους, οι οποίοι προκύπτουν από τον A, έτσι ώστε για κάθε $m \times n$ πίνακα A να έχουμε τέσσερις υπόχωρους:

- Ο **χώρος στηλών** του A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ ο οποίος παράγεται από τις στήλες του A, και συμβολίζεται
$$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m .$$

- Ο **μηδενόχωρος** του A είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος αποτελείται από τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$, και συμβολίζεται
$$\mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n .$$

- Ο **χώρος γραμμών** του A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος παράγεται από τις γραμμές του A. Προφανώς συμπίπτει με το χώρο στηλών του ανάστροφου πίνακα A^T, και συμβολίζεται
$$\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n .$$

- Ο **αριστερός μηδενόχωρος** του A είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ ο οποίος αποτελείται από τις λύσεις της εξίσωσης $y^T A = 0$. Συμπίπτει με το μηδενόχωρο του ανάστροφου πίνακα A^T, αφού $y^T A = (A^T y)^T$, και συμβολίζεται
$$\mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m .$$

Θα μελετήσουμε καθένα από αυτούς τους χώρους: θα βρούμε τη διάσταση τους, και θα περιγράψουμε βάσεις, χρησιμοποιώντας τον πίνακα A και τον κλιμακωτό πίνακα U που προκύπτει μετά την απαλοιφή.

Επιστρέφουμε στο παράδειγμα 4.1 και θεωρούμε ταυτοχρόνως τους πίνακες A και U:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο χώρος γραμμών του A, $\mathcal{R}(A^T)$

Για ένα κλιμακωτό πίνακα U εύκολα βλέπουμε οτι ο χώρος γραμμών έχει ως βάση τις μη μηδενικές γραμμές του U: στην Πρόταση 6.4 δείξαμε οτι είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και παράγουν όλο το χώρο αφού οι μηδενικές γραμμές δεν συνεισφέρουν τίποτα περισσότερο. Η σημαντική παρατήρηση είναι οτι ο χώρος γραμμών του A είναι ίδιος με το χώρο γραμμών του U.

Λήμμα 6.16 *Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας και U είναι ο αντίστοιχος κλιμακωτός πίνακας, όπως στο Θεώρημα 4.4, τότε οι πίνακες A και U έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών:*

$$\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(U^T)\,.$$

Απόδειξη. Κάθε γραμμή του U προκύπτει από γραμμικούς συνδυασμούς των γραμμών του A. (Στο παράδειγμα, η 2η γραμμή του U είναι η 2η γραμμή του A μείον το διπλάσιο της 1ης γραμμής του A.) Άρα και οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός γραμμών του U μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός γραμμών του A. Άρα ο χώρος γραμμών του U περιέχεται στο χώρο γραμμών του A:

$$\mathcal{R}(U^T) \subseteq \mathcal{R}(A^T)\,.$$

Αλλά αφού η διαδικασία της απαλοιφής είναι αντιστρέψιμη κάθε γραμμή του A μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του U. (Στο παράδειγμα, η 2η γραμμή του A είναι η 2η γραμμή του U συν το διπλάσιο της 1ης γραμμής του U.) Άρα ο χώρος γραμμών του A περιέχεται στο χώρο γραμμών του U:

$$\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathcal{R}(U^T)\,.$$

Συμπεραίνουμε οτι

$$\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(U^T)\,.$$

□

Ως βάση του $\mathcal{R}(A^T)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μη μηδενικές γραμμές του U. Το πλήθος αυτών είναι ίσο με την τάξη r του πίνακα. Συμπεραίνουμε οτι η διάσταση του χώρου γραμμών είναι ίση με την τάξη του πίνακα:

$$\dim \mathcal{R}(A^T) = r\,.$$

Μπορούμε να βρούμε μία βάση του χώρου γραμμών που να αποτελείται από γραμμές του A. Εάν όμως έχουν υπάρξει εναλλαγές γραμμών στην απαλοιφή Gauss, οι r πρώτες γραμμές του πίνακα A μπορεί να μην είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Καταγράφουμε τις προηγούμενες παρατηρήσεις στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 6.17 *Ο χώρος γραμμών του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, και έχει διάσταση ίση με την τάξη του πίνακα,*

$$\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n \quad , \quad \dim \mathcal{R}(A^T) = r$$

Μία βάση του $\mathcal{R}(A^T)$ αποτελείται από τις μη μηδενικές γραμμές του αντίστοιχου κλιμακωτού πίνακα U.

Ο μηδενόχωρος του A, $\mathcal{N}(A)$.

Έχουμε δει οτι ο μηδενόχωρος του A είναι ίσος με το μηδενόχωρο του U. Γι' αυτό ακριβώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την απαλοιφή Gauss για να λύσουμε το σύστημα $Ax = 0$. Έχουμε δει επίσης οτι για κάθε ελεύθερη μεταβλητή $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ μπορούμε να βρούμε διανύσματα $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ τέτοια ώστε $\mathcal{N}(A) = \langle v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \rangle$. Το διάνυσμα v_{i_j} έχει την τιμή 1 στην ελεύθερη μεταβλητή x_{i_j}, και την τιμή 0 στις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές. Συνεπώς κανένα από τα διανύσματα v_{i_j} δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Συμπεραίνουμε οτι τα διανύσματα $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνεπώς οτι αποτελούν βάση του μηδενόχωρου $\mathcal{N}(A)$. Η διάσταση του μηδενόχωρου είναι ίση με το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών, $k = n - r$.

Πρόταση 6.18 *Ο μηδενόχωρος του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, και έχει διάσταση ίση με το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών,*

$$\mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n \quad , \quad \dim \mathcal{N}(A) = n - r\,.$$

Ο χώρος στηλών του A, $\mathcal{R}(A)$.

Ο χώρος στηλών του A είναι ίσος με το χώρο γραμμών του ανάστροφου πίνακα A^T, αφού $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}((A^T)^T)$. Άρα μπορούμε να βρούμε μία βάση του $\mathcal{R}(A)$ που αποτελείται από τις γραμμές του κλιμακωτού πίνακα $\tilde{U}$ που προκύπτει από την απαλοιφή Gauss στον A^T. Προσέξτε οτι $\tilde{U} \neq U^T$. Το μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι οτι πρέπει να επαναλάβουμε την διαδικασία της απαλοιφής για τον ανάστροφο πίνακα A^T.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη σχέση του $\mathcal{R}(A)$ με τον $\mathcal{R}(U)$ η οποία δεν είναι τόσο απλή όσο η σχέση μεταξύ των $\mathcal{R}(A^T)$ και $\mathcal{R}(U^T)$.. Από το παράδειγμα είναι προφανές οτι ο $\mathcal{R}(A)$ δεν είναι ο ίδιος με τον $\mathcal{R}(U)$.

> **Δραστηριότητα 6.1** Βρείτε ένα διάνυσμα του $\mathcal{R}(A)$ του παραδείγματος 4.1 που δεν ανήκει στον $\mathcal{R}(U)$.

Το ακόλουθο Λήμμα περιγράφει τη σχέση μεταξύ των στηλών του A και των στηλών του U.

Λήμμα 6.19 *Ένα σύνολο στηλών του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητο εάν και μόνον εάν το αντίστοιχο σύνολο στηλών του U είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Εάν A' είναι ο πίνακας που παίρνουμε από ένα υποσύνολο των στηλών του A, και U' ο πίνακας από τις αντίστοιχες στήλες του U, τότε

$$A' = P^{-1}\, L\, U'$$

και, αφού ο πίνακας $P^{-1}\, L$ είναι αντιστρέψιμος, ένα διάνυσμα x ικανοποιεί την εξίσωση $A'x = 0$ εάν και μόνον εάν ικανοποιεί την εξίσωση $U'x = 0$.

Εάν οι στήλες του U' είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε η μοναδική λύση του $U'x = 0$ είναι η $x = 0$, και συνεπώς η μοναδική λύση του $A'x = 0$ είναι η $x = 0$. Συνεπώς οι στήλες του A' είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Οι συνεπαγωγές ισχύουν και αντίστροφα: εάν οι στήλες του A' είναι γραμμικά ανεξάρτητες, το ίδιο ισχύει για τις στήλες του U'.

□

Γνωρίζουμε οτι οι r στήλες που περιέχουν οδηγούς αποτελούν βάση του $\mathcal{R}(U)$. Συνεπώς οι αντίστοιχες r στήλες $j_1, \ldots, j_r$ του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Εάν η διάσταση του $\mathcal{R}(A)$ ήταν μεγαλύτερη από r, τότε θα υπήρχε κάποια άλλη στήλη του A η οποία, μαζί με τις $j_1, \ldots, j_r$ θα αποτελούσε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Αλλά τότε οι αντίστοιχες $r+1$ στήλες του U θα ήταν γραμμικά ανεξάρτητες, που δεν μπορεί να συμβεί, αφού η διάσταση του $\mathcal{R}(U)$ είναι r. Συνεπώς οι στήλες $j_1, \ldots, j_r$ παράγουν το $\mathcal{R}(A)$ και αποτελούν βάση του. Έχουμε αποδείξει την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 6.20 *Ο χώρος στηλών του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, και έχει διάσταση ίση με την τάξη r του πίνακα,*

$$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m \quad , \quad \dim \mathcal{R}(A) = r\,.$$

Μία βάση του $\mathcal{R}(A)$ αποτελείται από τις στήλες που αντιστοιχούν στις στήλες του κλιμακωτού πίνακα U που περιέχουν οδηγούς.

Συνέπεια των Προτάσεων 6.17 και 6.20 είναι το ακόλουθο θεμελιώδες αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.21 *Σε κάθε $m \times n$ πίνακα A, το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του A είναι ίσο με την τάξη του πίνακα, δηλαδή το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A.*

Ο αριστερός μηδενόχωρος του A, $\mathcal{N}(A^T)$.

Ο αριστερός μηδενόχωρος του A είναι ο μηδενόχωρος του ανάστροφου πίνακα A^T. Γνωρίζουμε οτι η διάσταση του μηδενόχωρου ενός πίνακα είναι το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών, που είναι ίσο με το πλήθος όλων των μεταβλητών μείον το πλήθος των βασικών μεταβλητών. Για τον πίνακα A^T, το πλήθος όλων των μεταβλητών είναι m (όσες είναι οι στήλες του A^T, δηλαδή όσες είναι οι γραμμές του A). Το πλήθος των βασικών μεταβλητών του A^T είναι ίσο με την τάξη του ,και από το Θεώρημα 6.21 αυτή είναι ίση με την τάξη του

A, δηλαδή r. Συνεπώς το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών του A^T είναι $m-r$, και

$$\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r\,.$$

Για να περιγράψουμε τα διανύσματα y που ικανοποιούν $y^T A = 0$, εξετάζουμε την παραγοντοποίηση

$$P\,A = L\,U\,.$$

Ο L είναι αντιστρέψιμος, και έχουμε

$$L^{-1}\,P\,A = U\,.$$

Η i γραμμή του U είναι το γινόμενο της i γραμμής του $L^{-1}P$ με τον πίνακα A. Οι $m-r$ τελευταίες γραμμές του U είναι ίσες με το μηδέν. Άρα εάν θεωρήσουμε τις $m-r$ τελευταίες γραμμές του $L^{-1}P$ ως διανύσματα του $\mathbb{R}^m$, αυτά ανήκουν στον αριστερό μηδενόχωρο του A. Αφού ο πίνακας $L^{-1}P$ είναι αντιστρέψιμος, οι γραμμές του είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα οι $m-r$ τελευταίες γραμμές του $L^{-1}P$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου $\mathcal{N}(A^T)$, ο οποίος έχει διάσταση $m-r$, και συνεπώς αποτελούν μία βάση του χώρου.

Πρόταση 6.22 *Ο αριστερός μηδενόχωρος του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, και έχει διάσταση $m-r$,*

$$\mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m \quad , \quad \dim \mathcal{N}(A^T) = m - r\,.$$

Μία βάση του $\mathcal{N}(A^T)$ αποτελείται από τις $m-r$ τελευταίες γραμμές του πίνακα $L^{-1}P$ της απαλοιφής Gauss.

Άσκηση 6.26 Περιγράψτε τους τέσσερεις υποχώρους του $\mathbb{R}^3$ που σχετίζονται με τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 6.27 Βρείτε μια βάση του χώρου στηλών του

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 6.28 Βρείτε τη διάσταση και μία βάση για τους τέσσερεις θεμελιώδεις υπόχωρους των πινάκων.

1.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6.29 Εάν το γινόμενο AB είναι ο μηδενικός πίνακας, $AB = 0$, δείξτε οτι ο χώρος στηλών του πίνακα B περιέχεται στο μηδενοχώρο του A. Δείξτε επίσης οτι ο χώρος γραμμών του A περιέχεται στον αριστερό μηδενοχώρο του B

Άσκηση 6.30 Βρείτε έναν πίνακα A ο οποίος έχει τον χώρο V ως χώρο στηλών, και ένα πίνακα B ο οποίος έχει τον χώρο V ως μηδενοχώρο: V είναι ο υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6.31 Γιατί δεν υπάρχει πίνακας A τέτοιος ώστε το διάνυσμα $(1, 1, 1)$ να περιέχεται στο χώρο γραμμών και στο μηδενοχώρο του A;

Άσκηση 6.32 Εάν η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μία μη μηδενική λύση, δείξτε οτι υπάρχουν διανύσματα w για τα οποία $A^T y = w$ δεν έχει λύση. Κατασκευάστε ένα τέτοιο A και w.

Άσκηση 6.33 Χωρίς να πολλαπλασιάσετε για να υπολογίσετε το A, βρείτε βάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων του A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6.34 Εάν εναλλάξετε τις δύο πρώτες γραμμές του πίνακα A, ποιοί από τους τέσσερεις υπόχωρους δεν αλλάζουν; Εάν $y = (1, 2, 3, 4)$ είναι στοιχείο στον αριστερό μηδενοχώρο του A, βρείτε ένα διάνυσμα στον αριστερό μηδενοχώρο του νέου πίνακα.

6.5 Διάσταση υπόχωρου και αθροίσματος

Πρόταση 6.23 *Κάθε διανυσματικός υπόχωρος X ενός διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης έχει πεπερασμένη διάσταση και $\dim X \leq \dim V$. Εάν $\dim X = \dim V$, τότε $X = V$.*

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε μία βάση του X επαγωγικά, ως ένα μέγιστο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο, βασιζόμενοι στην ιδιότητα οτι κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V, και συνεπώς έχει το πολύ $\dim V$ στοιχεία.

Εάν $X = \{0\}$, τότε $\dim X = 0 \leq \dim V$.

Εάν $X \neq \{0\}$, θεωρούμε μη μηδενικό διάνυσμα $x_1 \in X$ και θέτουμε $Y_1 = \langle x_1 \rangle$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε οτι έχουμε κατασκευάσει ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X με $k \leq \dim V$ στοιχεία, $\{x_1, \dots, x_k\}$ του X, και θέτουμε $Y_k = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$. Εάν $X = Y_k$, τότε $\dim X = k \leq \dim V$. Διαφορετικά, θεωρούμε διάνυσμα $x_{k+1} \in X \setminus Y_k$. Θα δείξουμε οτι $\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Θεωρούμε γραμμικό συνδυασμό των $x_1, \dots, x_{k+1}$ που εκφράζει το μηδενικό διάνυσμα,

$$a_1 x_1 + \ldots + a_{k+1} x_{k+1} = 0 .$$

Εάν $a_{k+1} \neq 0$, τότε $x_{k+1} \in Y_k$, που αντιφάσκει προς τις υποθέσεις μας. Άρα $a_{k+1} = 0$, και $a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k = 0$. Αλλά $\{x_1, \dots, x_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και συνεπώς $a_1 = \cdots = a_k = 0$.

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε διαδοχικά μεγαλύτερα γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του X. Αφού δεν υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του V με περισσότερα από $\dim V$ στοιχεία, η διαδικασία τερματίζεται, και $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ για κάποιο $n \leq \dim V$. Συνεπώς $\dim X = n \leq \dim V$.

Εάν $\dim X = \dim V$, τότε μία βάση του X είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V με $\dim V$ στοιχεία, και συνεπώς παράγει το V.

□

Πρόταση 6.24 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης, και διανυσματικούς υπόχωρους X και Y. Τότε ισχύει η σχέση*

$$\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση όπου $X \cap Y \neq \{0\}$. Διαλέγουμε μία βάση $\{z_1, \dots, z_n\}$ του $X \cap Y$. Τότε υπάρχουν $x_1, \dots, x_\ell \in X$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_\ell\}$ να αποτελεί βάση του X. Υπάρχουν επίσης $y_1, \dots, y_m \in Y$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{z_1, \dots, z_n, y_1, \dots, y_m\}$ να αποτελεί βάση του Y.

Θα αποδείξουμε οτι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \{z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_\ell, y_1, \dots, y_m\}$$

είναι βάση του $X+Y$.

Αφού κάθε $v \in X+Y$ είναι άθροισμα $v = x+y$ για $x \in X$ και $y \in Y$, το $\mathcal{B}$ παράγει το $X+Y$. Για να δείξουμε οτι το $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, θεωρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό

$$a_1z_1 + \cdots + a_nz_n + b_1x_1 + \cdots + b_\ell x_\ell + c_1y_1 + \cdots c_my_m = 0.$$

Θέτουμε $v = a_1z_1+\cdots+a_nz_n+b_1x_1+\cdots+b_\ell x_\ell \in X$, και έχουμε $v = -(c_1y_1+\cdots+c_my_m) \in Y$. Συμπεραίνουμε οτι το $v \in X \cap Y$ και συνεπώς υπάρχουν $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $v = d_1z_1 + \cdots + d_nz_n$.

Από τη γραμμική ανεξαρτησία των $z_1, \ldots, z_n$, $x_1, \ldots, x_\ell$, η έκφραση του v ως γραμμικού συνδυασμού είναι μοναδική, και η ισότητα

$$a_1z_1 + \cdots + a_nz_n + b_1x_1 + \cdots + b_lx_l = d_1z_1 + \cdots + d_nz_n$$

συνεπάγεται οτι $a_i = d_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, και $b_j = 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, \ell$.

Παρόμοια, η γραμμική ανεξαρτησία των $z_1, \ldots, z_n$, $y_1, \ldots, y_m$ και η ισότητα

$$d_1z_1 + \cdots + d_nz_n = -(c_1y_1 + \cdots + c_my_m)$$

συνεπάγεται οτι $d_i = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, και $c_j = 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$. Καταλήγουμε οτι όλοι οι συντελεστές είναι 0, συνεπώς το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Η περίπτωση $X \cap Y = \{0\}$ αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο.

□

Πόρισμα 6.25 *Το άθροισμα των διανυσματικών υπόχωρων $X+Y$ είναι ευθύ εάν και μόνον εάν*

$$\dim(X+Y) = \dim X + \dim Y\,.$$

□

Πρόταση 6.26 *Έστω διανυσματικός χώρος V πεπερασμένης διάστασης. Εάν X είναι υπόχωρος του V, υπάρχει υπόχωρος Y του V, τέτοιος ώστε*

$$V = X \oplus Y\,.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι $\dim V = n$, $\dim X = m$, $m \le n$, και θεωρούμε βάση του X, $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Εάν $m = n$, $V = X = X \oplus \{0\}$. Εάν $m < n$, από την Πρόταση 6.15 υπάρχουν διανύσματα $y_1, \ldots, y_{n-m}$ του V τέτοια ώστε $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-m}\}$ είναι βάση του V. Θέτουμε $Y = \langle y_1, \ldots, y_{n-m}\rangle$. Προφανώς $X+Y = \langle x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-m}\rangle$, δηλαδή $X+Y = V$. Αφού $\dim(X+Y) = \dim X + \dim Y$, $X \cap Y = \{0\}$ και το άθροισμα είναι ευθύ.

□

Όταν X και Y είναι υπόχωροι του V, και $V = X \oplus Y$, λέμε οτι ο Y είναι **συμπληρωματικός υπόχωρος** του X στον V.

Παράδειγμα 6.16 Ένα επίπεδο και μία ευθεία στο $\mathbb{R}^3$ που δεν κείται στο επίπεδο, αποτελούν συμπληρωματικούς υπόχωρους: η τομή τους είναι $\{0\}$ και το άθροισμά τους όλος ο χώρος $\mathbb{R}^3$.

Θα δείξουμε οτι οι τέσσερεις θεμελιώδεις υπόχωροι ενός πίνακα αποτελούν δύο ζεύγη συμπληρωματικών υποχώρων στο $\mathbb{R}^n$ και στο $\mathbb{R}^m$.

Λήμμα 6.27 *Η τομή του χώρου γραμμών και του μηδενόχωρου ενός $m \times n$ πίνακα είναι ο μηδενικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.*
Η τομή του χώρου στηλών και του αριστερού μηδενόχωρου ενός $m \times n$ πίνακα είναι ο μηδενικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα διάνυσμα $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^T)$. Αφού x ανήκει στο χώρο γραμμών, υπάρχει διάνυσμα $c = (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε

$$\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_m \end{bmatrix} A\,.$$

Άρα

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_m \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

δηλαδή $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = c^T A x$. Αλλά αφού x ανήκει στο μηδενόχωρο, $Ax = 0$. Άρα $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ και συνεπώς $x = 0$.

Θεωρώντας τον ανάστροφο πίνακα A^T έχουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα για το χώρο στηλών και τον αριστερό μηδενόχωρο.

□

Πρόταση 6.28 *Θεωρούμε $m \times n$ πίνακα A. Ο χώρος γραμμών είναι συμπλήρωμα του μηδενόχωρου στο $\mathbb{R}^n$, και ο χώρος στηλών είναι συμπλήρωμα του αριστερού μηδενόχωρου στο $\mathbb{R}^m$:*

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{R}(A^T) \oplus \mathcal{N}(A) \quad \text{και} \quad \mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T)\,.$$

Απόδειξη. Αφού $\mathcal{R}(A^T) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}$, $\dim(\mathcal{R}(A^T) \oplus \mathcal{N}(A)) = \dim \mathcal{R}(A^T) + \dim \mathcal{N}(A) = n$. Άρα $\mathcal{R}(A^T) \oplus \mathcal{N}(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης n, δηλαδή είναι ίσο με το $\mathbb{R}^n$. Ανάλογα, $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T) = \mathbb{R}^m$.

□

6.6 Ύπαρξη βάσης

Πρόταση 6.29 *Εάν ο διανυσματικός χώρος V παράγεται από το πεπερασμένο σύνολο S, και F είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του S, τότε υπάρχει μία βάση $\mathcal{B}$ του V τέτοια ώστε*

$$F \subseteq \mathcal{B} \subseteq S\,.$$

Απόδειξη. Έστω $\{v_1, \ldots, v_k\}$ το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο F, και

$$S = \{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_m\}.$$

Εάν το S είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε S είναι βάση του V, και θέτουμε $\mathcal{B} = S$. Εάν το S δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε μπορούμε να εκφράσουμε το μηδενικό διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του S, με τουλάχιστον ένα συντελεστή διαφορετικό από το 0:

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k + b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m = 0.$$

Εάν $a_i = 0$ για όλα τα $i = 1, \ldots, k$, τότε υπάρχει κάποιο $j = 1, \ldots, m$ για το οποίο $b_j \neq 0$. Εάν $a_i \neq 0$ για κάποιο $i = 1, \ldots, k$, τότε, από την γραμμική ανεξαρτησία των $v_1, \ldots, v_n$, συμπεραίνουμε οτι $a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k \neq 0$, και συνεπώς πάλι υπάρχει κάποιο $j = 1, \ldots, m$ για το οποίο $b_j \neq 0$. Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει κάποιο $j = 1, \ldots, m$ τέτοιο ώστε w_j έχει μη μηδενικό συντελεστή, και από το Λήμμα Γραμμικής Εξάρτησης, Λήμμα 6.2, το σύνολο $S_1 = S \setminus \{w_j\}$ παράγει όλο το χώρο V. Εάν S_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητο, θέτουμε $\mathcal{B} = S_1$. Διαφορετικά, επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία και διαγράφουμε κάποιο άλλο από τα περιττά w_j. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί το πολύ m φορές, και καταλήγει σε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο που παράγει το V, δηλαδή τη ζητούμενη βάση $\mathcal{B}$.

□

Το επόμενο αποτέλεσμα ισχύει σε κάθε διανυσματικό χώρο, αλλά εδώ θα το αποδείξουμε μόνο για πεπερασμένα παραγόμενους διανυσματικούς χώρους. Στην περίπτωση μη πεπερασμένα παραγόμενων χώρων, η ύπαρξη βάσης είναι συνέπεια του Αξιώματος Επιλογής (δες Θεμέλια των Μαθηματικών, Επίλογος).

Θεώρημα 6.30 *Κάθε διανυσματικός χώρος V περιέχει μία βάση. Ειδικότερα, κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο του V μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση του χώρου V, και κάθε σύνολο που παράγει το διανυσματικό χώρο V περιέχει μία βάση του V.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι ο διανυσματικός χώρος V παράγεται από το πεπερασμένο σύνολο S.

Θεωρούμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο F στο V (το οποίο μπορεί να είναι και το κενό σύνολο) και εφαρμόζουμε την Πρόταση 6.29 στο πεπερασμένο παράγον σύνολο $S \cup F$ και στο γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο F, για να κατασκευάσουμε μία βάση $\mathcal{B}$ του V, με $F \subseteq \mathcal{B}$.

□

Αφού ένας πεπερασμένα παραγομενος χώρος έχει μία πεπερασμένη βάση, είναι φανερό οτι ένας χώρος είναι πεπερασμένα παραγόμενος εάν και μόνον εάν έχει πεπερασμένη διάσταση. Γι' αυτό το λόγο, ο όρος πεπερασμένα παραγόμενος δεν χρησιμοποιείται για διανυσματικούς χώρους, και αντικαθίσταται από τον όρο χώρος πεπερασμένης διάστασης.

Άσκηση 6.35 Υποθέτουμε οτι Y και Z είναι διανυσματικοί υπόχωροι του διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης V. Δείξτε οτι το άθροισμα $Y + Z$ είναι ευθύ εάν και μόνον εάν $\dim(Y + Z) = \dim Y + \dim Z$.

Άσκηση 6.36 Θεωρήστε διανυσματικό χώρο V πάνω από το $\mathbb{R}$, γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_5$ στο V, και διάνυσμα $w = \sqrt{2}\, v_1 - \frac{1}{3}\, v_2 + v_3 + 3v_4 - \sqrt{3}\, v_5$.

1. Υπάρχουν δύο τρισδιάστατοι υπόχωροι W_1 και W_2 του V, τέτοιοι ώστε $W_1 \cap W_2 = \langle w \rangle$;

2. Υπάρχουν δύο διδιάστατοι υπόχωροι U_1 και U_2 του V, οι οποίοι δεν περιέχουν το w, και τέτοιοι ώστε $w \in U_1 + U_2$;

Άσκηση 6.37 Θεωρούμε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^5$,

$$X = \big\{(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 3x_1 = 2x_2 + x_3,\, x_4 = x_5\big\}$$

1. Βρείτε υπόχωρο $Y \subseteq \mathbb{R}^5$, τέτοιο ώστε $\mathbb{R}^5 = X \oplus Y$.

2. Βρείτε υπόχωρο $U \subseteq \mathbb{R}^5$, τέτοιο ώστε $(0, 1, -2, 1, 1) \in U$ και $\mathbb{R}^5 = X + U$.

Άσκηση 6.38 Στο διανυσματικό χώρο $C^0([0, 1])$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 1]$, θεωρούμε τους υποχώρους X των σταθερών συναρτήσεων και Y των συναρτήσεων g για τις οποίες $\int_0^1 g(t)dt = 0$. Δείξτε οτι X και Y είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι του $C^0([0, 1])$, δηλαδή οτι $C^0([0, 1]) = X \oplus Y$.

Κεφάλαιο 7

Γραμμικές Απεικονίσεις

7.1 Γραμμικές απεικονίσεις

Οταν πολλαπλασιάζουμε ένα διάνυσμα x με ένα πίνακα A παίρνουμε ένα καινούργιο διάνυσμα Ax. Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ παίρνουμε ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^m$. Δηλαδή ο πίνακας A ορίζει μια απεικόνιση T_A από το χώρο $\mathbb{R}^n$ στο χώρο $\mathbb{R}^m$:

$$T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax\,.$$

Παράδειγμα 7.1 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^2$, $Ax = cx$. Κάθε διάνυσμα διαστέλλεται με το συντελεστή c. Εάν $c > 1$, το διάνυσμα γίνεται μεγαλύτερο, εάν $0 < c < 1$, το διάνυσμα γίνεται μικρότερο. Τέλος εάν $c < 0$, το διάνυσμα αλλάζει φορά.

Παράδειγμα 7.2 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Για κάθε διάνυσμα $x = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $Ax = (-v, u)$. Πολλαπλασιασμός με αυτόν τον πίνακα περιστρέφει το επίπεδο γύρω από το 0, κατά μια ορθή γωνία.

Παράδειγμα 7.3 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Για κάθε διάνυσμα $x = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $Ax = (v, u)$. Πολλαπλασιασμός με αυτόν τον πίνακα ανακλά το επίπεδο ως προς την ευθεία $u = v$.

Παράδειγμα 7.4 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Για κάθε διάνυσμα $x = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $Ax = (u, 0)$. Πολλαπλασιασμός με αυτόν τον πίνακα προβάλλει το επίπεδο στον u-άξονα.

Τί είδους απεικονίσεις μπορούν να προκύψουν από πολλαπλασιασμό με ένα πίνακα; Εύκολα μπορούμε να βρούμε κάποιες ιδιότητες.

1. Το 0 πρέπει να απεικονίζεται στο 0: εφ' όσον $A0 = 0$,

$$T_A(0) = 0\,.$$

2. Πολλαπλάσια ενός διανύσματος πρέπει να απεικονίζονται στα αντίστοιχα πολλαπλάσια της εικόνας του διανύσματος: εφ' όσον $A(cx) = c(Ax)$,

$$T_A(cx) = c\,T_A(x)\,.$$

3. Το άθροισμα δύο διανυσμάτων απεικονίζεται στο άθροισμα των εικόνων των δύο διανυσμάτων: εφ' όσον $A(x + y) = Ax + Ay$,

$$T_A(x + y) = T_A(x) + T_A(y)\,.$$

Απεικονίσεις που έχουν αυτές τις ιδιότητες ονομάζονται γραμμικές απεικονίσεις ή γραμμικοί μετασχηματισμοί.

Ορισμός 7.1. Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V και W πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς. Μία απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$ είναι **γραμμική απεικόνιση** εάν για κάθε $x, y \in V$ και κάθε $c \in \mathbb{R}$,

1. $L(x + y) = L(x) + L(y)$ και

2. $L(cx) = c\,L(x)$.

Παράδειγμα 7.5 Συμβολίζουμε $C^1(\mathbb{R})$ το χώρο των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής που είναι παραγωγίσιμες σε όλο το $\mathbb{R}$ και έχουν συνεχή παράγωγο. Εάν $f \in C^1(\mathbb{R})$, η παραγώγιση D, που απεικονίζει την f στην παράγωγό της $D(f) = f'$, είναι απεικόνιση από το $C^1(\mathbb{R})$ στο $C^0(\mathbb{R})$, και έχει τις ιδιότητες, για $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ και $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} D(f + g) &= Df + Dg \\ D(af) &= a\,Df \end{aligned}$$

Το επόμενο αποτέλεσμα λέει οτι μπορούμε να συνδυάσουμε τον έλεγχο των δύο συνθηκών σε μία. Η απόδειξη του βασίζεται στην επιλογή κατάλληλων τιμών του a και του w.

Λήμμα 7.1 *Η απεικόνιση L είναι γραμμική εάν και μόνον εάν για κάθε $v, w \in V$ και $a \in \mathbb{R}$,*

$$L(av + w) = aL(v) + L(w)\,.$$

Δραστηριότητα 7.1 Γράψτε την απόδειξη του Λήμματος.

Είδαμε οτι η απεικόνιση T_A, που πολλαπλασιάζει κάθε διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ με τον $m \times n$ πίνακα A και δίδει ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^m$, είναι γραμμική. Θα δείξουμε οτι και αντίστροφα, κάθε γραμμική απεικόνιση από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^m$ προκύπτει με αυτόν τον τρόπο.

Πρόταση 7.2 *Κάθε γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ αντιστοιχεί σε ένα $m \times n$ πίνακα A, τέτοιο ώστε, για κάθε $b \in \mathbb{R}^n$, $L(b) = Ab$,*

$$L(b_1, \ldots, b_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την κανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$,

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_j = (\delta_{1j}, \ldots, \delta_{nj}), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

και τα διανύσματα $L(e_1), \ldots, L(e_n) \in \mathbb{R}^m$.

Ορίζουμε τον πίνακα A να έχει στη j στήλη, για $j = 1, \ldots, n$, το διάνυσμα $L(e_j) \in \mathbb{R}^m$. Δηλαδή

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

όπου $(a_{1j}, \ldots, a_{mj}) = L(e_j)$.

Εάν $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ έχουμε $b = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$, και συνεπώς

$$\begin{aligned} L(b) &= b_1 L(e_1) + \cdots + b_n L(e_n) \\ &= b_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + b_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε την παράσταση του γινομένου πίνακα με διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό των στηλών του πίνακα, και έχουμε

$$\begin{aligned} L(b) &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= Ab\,. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 7.6 Η **μηδενική** απεικόνιση $\mathbf{0} : V \longrightarrow W$, η οποία απεικονίζει κάθε διάνυσμα του V στο μηδενικό διάνυσμα του W, $\mathbf{0}(v) = 0$, είναι γραμμική.

Παράδειγμα 7.7 Η **ταυτοτική** απεικόνιση $\mathbf{I}_V : V \longrightarrow V$, η οποία απεικονίζει κάθε διάνυσμα του V στον εαυτό του, $\mathbf{I}_V(v) = v$, είναι γραμμική.

Παράδειγμα 7.8 Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η απεικόνιση $T_a : V \longrightarrow V$, η οποία πολλαπλασιάζει κάθε διάνυσμα με τον αριθμό a, $T_a(v) = a\,v$, είναι γραμμική. Παρατηρούμε οτι η απεικόνιση $\mathbf{0} : V \longrightarrow V$ είναι ίση με την $T_0 : V \longrightarrow V$, ενώ η $\mathbf{I} : V \longrightarrow V$ είναι ίση με την $T_1 : V \longrightarrow V$.

Παράδειγμα 7.9 Η ολοκλήρωση, $I : C^0([0,\, 1]) \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία απεικονίζει κάθε συνεχή απεικόνιση στο διάστημα $[0,\, 1]$, στο ολοκλήρωμά της στο $[0,\, 1]$,

$$I(f) = \int_0^1 f(t)dt\,,$$

είναι γραμμική απεικόνιση. Πράγματι, για κάθε $f,\, g \in C^0[0,\, 1]$ και κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} I(af+g) &= \int_0^1 (af(t)+g(t))\,dt \\ &= a\int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 g(t)dt \\ &= aI(f) + I(g) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.10 Στο χώρο των πολυωνύμων, ο πολλαπλασιασμός με ένα σταθερό μονώνυμο είναι γραμμική απεικόνιση. Θεωρούμε το μονώνυμο bx^m, και ορίζουμε την απεικόνιση $T_{bx^m} : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ με

$$T_{bx^m}\,(q(x)) = bx^m\,q(x)$$

Εάν $q(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, τότε

$$T_{bx^m}\,(q(x)) = ba_0x^m + \cdots + ba_nx^{m+n}\,,$$

και μπορείτε εύκολα να ελέγξετε οτι T_{bx^m} είναι γραμμική απεικόνιση.

Παράδειγμα 7.11 Στο χώρο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ των πραγματικών ακολουθιών, ορίζουμε την απεικόνιση shift, $s : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, με

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto (a_2, a_3, a_4, \ldots),$$

ή, πιο αυστηρά, $s((a_n)) = (b_n)$, όπου $b_n = a_{n+1}$. Η απεικόνιση shift είναι γραμμική.

Θα εξετάσουμε παραδείγματα απεικονίσεων που δεν είναι γραμμικές.

Παράδειγμα 7.12 Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$ *δεν είναι γραμμική* εάν $b \neq 0$, παρ' όλο που το γράφημα της είναι μία ευθεία. Γενικότερα, οι μόνες πολυωνυμικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι γραμμικές είναι τα μονώνυμα βαθμού 1. Έτσι η $f(x) = 3x$ είναι γραμμική, αλλά οι $g(x) = 3x + 2$ και $h(x) = 2x^2$, δεν είναι γραμμικές.

Παράδειγμα 7.13 Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, και $b \in \mathbb{R}^m$, η απεικόνιση $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax + b$ δεν είναι γραμμική εάν $b \neq 0$.

Μπορούμε να βρούμε συναρτήσεις που ικανοποιούν τη μία από τις δύο συνθήκες αλλά όχι την άλλη.

Παράδειγμα 7.14 Στο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1}{x_2}(x_1, x_2) & \text{εάν } x_2 \neq 0 \\ (0, 0) & \text{εάν } x_2 = 0. \end{cases}$$

Η $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ικανοποιεί τη ιδιότητα $f(ax) = af(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$, αλλά δεν ικανοποιεί την προσθετική ιδιότητα.

Στα επόμενα αποτελέσματα αποδεικνύουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες των γραμμικών απεικονίσεων. Ειδικότερα στο Λήμμα 7.3, 2 και 3 δείχνουμε οτι μια γραμμική απεικόνιση μπορεί να χαλάσει τη γραμμική ανεξαρτησία μιας συλλογής διανυσμάτων, αλλά δεν μπορεί μια γραμμικά εξαρτημένη συλλογή να την κάνει γραμμικά ανεξάρτητη.

Λήμμα 7.3 *Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V και W, και γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$.*

1. *$L(0) = 0$.*
2. *Εάν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε τα $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.*
3. *Εάν $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Εάν $v \in V$, τότε $0v = 0$ και $L(0) = L(0v) = 0L(v) = 0$.

Θεωρούμε το γραμμικό συνδυασμό $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$. Εάν αυτός είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα, τότε

$$a_1L(v_1) + \cdots + a_nL(v_n) = L(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = L(0) = 0\,.$$

Συνεπώς εάν υπάρχει μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$ που εκφράζει το 0, τότε το ίδιο ισχύει και για τα $L(v_1), \ldots, L(v_n)$.

Αντιθέτως, εάν το μηδενικό διάνυσμα δεν εκφράζεται ως μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $L(v_1), \ldots, L(v_n)$, τότε το ίδιο ισχύει και για τα $v_1, \ldots, v_n$.

□

Ορισμός 7.2. Θεωρούμε γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$.

1. Το σύνολο $\{y \in W : y = L(x)$ για κάποιο $x \in V\} \subseteq W$ ονομάζεται **εικόνα** της L, και συμβολίζεται $\operatorname{im} L$.

2. Το σύνολο $\{x \in V : L(x) = 0\} \subseteq V$ ονομάζεται **πυρήνας** της L, και συμβολίζεται $\ker L$.

Λήμμα 7.4 *Ο πυρήνας* $\ker L$ *μίας γραμμικής απεικόνισης* $L : V \longrightarrow W$ *είναι διανυσματικός υπόχωρος του* V. *Η εικόνα* $\operatorname{im} L$ *της* L *είναι διανυσματικός υπόχωρος του* W *και* $\dim \operatorname{im} L \leq \dim V$.

Απόδειξη. Εάν $x_1, x_2 \in \ker L$, τότε $x_1 + x_2 \in \ker L$ αφού $L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) = 0 \in W$. Εάν $a \in \mathbb{R}$, τότε $ax_1 \in \ker L$ αφού $L(ax_1) = aL(x_1) = 0 \in W$. Συμπεραίνουμε οτι $\ker L$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου V, και συνεπώς είναι διανυσματικός υπόχωρος.

Εάν $y_1, y_2 \in \operatorname{im} L$, υπάρχουν διανύσματα $x_1, x_2 \in V$ τέτοια ώστε $L(x_1) = y_1$ και $L(x_2) = y_2$. Από τη γραμμικότητα της L, $y_1 + y_2 = L(x_1 + x_2) \in \operatorname{im} L$ και $ay_1 = L(ax_1) \in \operatorname{im} L$. Συμπεραίνουμε οτι $\operatorname{im} L$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου W, και συνεπώς είναι διανυσματικός υπόχωρος.

Εάν $V = \{0\}$, τότε $\operatorname{im} L = \{0\}$, και $\dim \operatorname{im} L = 0 = \dim X$. Κατόπιν υποθέτουμε οτι $0 < \dim V < \infty$. Θεωρούμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{y_1, \ldots, y_n\}$ στο $\operatorname{im} L$, και διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$ στο V τέτοια ώστε $L(x_i) = y_i$, για $i = 1, \ldots, n$. Από το Λήμμα 7.3, 3, τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και συνεπώς $n \leq \dim V$. Αυτό ισχύει για κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο $\operatorname{im} L$, άρα το $\operatorname{im} L$ έχει πεπερασμένη διάσταση και $\dim \operatorname{im} L \leq \dim V$.

□

Ορισμός 7.3. Η διάσταση $\dim \operatorname{im} L$ της εικόνας της γραμμικής απεικόνισης L ονομάζεται **τάξη** της L και συμβολίζεται $\operatorname{rank} L$.

Παράδειγμα 7.15 Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα A, και τη γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $T_A(x) = Ax$. Ο πυρήνας της T_A είναι το σύνολο των διανυσμάτων x του $\mathbb{R}^n$ για τα οποία $Ax = 0$, δηλαδή ο μηδενόχωρος του πίνακα A,

$$\ker T_A = \mathcal{N}(A)\,.$$

Η εικόνα της T_A είναι ο χώρος όλων των διανυσμάτων $y \in \mathbb{R}^m$ για τα οποία υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Ax = y$, δηλαδή ο χώρος στηλών του A,

$$\operatorname{im} T_A = \mathcal{R}(A)\,.$$

Παράδειγμα 7.16 Ο πυρήνας της μηδενικής απεικόνισης $\mathbf{0} : V \longrightarrow W$ είναι όλο το πεδίο ορισμού, $\ker \mathbf{0} = V$. Η εικόνα της είναι ο μηδενικός υπόχωρος του W, $\operatorname{im} \mathbf{0} = \{0\} \subseteq W$.

Παράδειγμα 7.17 Ο πυρήνας της απεικόνισης παραγώγισης $D : C^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο όλων των σταθερών συναρτήσεων,

$$\ker D = \{f \in C^1(\mathbb{R}) : \text{υπάρχει } c \in \mathbb{R} \text{ τέτοιο ώστε } f(t) = c \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Η εικόνα της είναι όλο το σύνολο $C^0(\mathbb{R})$, αφού για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, υπάρχει αντιπαράγωγος

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt\,.$$

Συνεπώς $\operatorname{im} D = C^0(\mathbb{R})$.

Παράδειγμα 7.18 Ο πυρήνας της απεικόνισης shift, $s : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι ο υπόχωρος όλων των ακολουθιών (a_n) για τις οποίες $a_n = 0$ για $n \geq 2$. Η εικόνα της είναι όλος ο χώρος $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Γνωρίζουμε οτι η διάσταση του μηδενόχωρου και η διάσταση του χώρου στηλών ενός $m \times n$ πίνακα ικανοποιούν τη σχέση

$$n = \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A)\,.$$

Συνεπώς για την απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, ισχύει

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \ker T_A + \dim \operatorname{im} T_A\,.$$

Θα δείξουμε οτι η ανάλογη σχέση ισχύει για κάθε γραμμική απεικόνιση με πεδίο ορισμού πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα 7.5 *Εάν $L : V \longrightarrow W$, είναι γραμμική απεικόνιση, και $\dim V < \infty$, τότε ισχύει η σχέση*

$$\dim V = \dim \ker L + \dim \operatorname{im} L\,.$$

Απόδειξη. Ο πυρήνας $\ker L$ είναι υπόχωρος του V, και από την Πρόταση 6.23, $\dim\ker L < \infty$. Έχουμε ήδη δείξει, στο Λήμμα 7.4, οτι $\dim\operatorname{im} L \leq \dim V$, συνεπώς $\dim\operatorname{im} L < \infty$. Θεωρούμε βάση $\{w_1, \ldots, w_m\}$ της εικόνας $\operatorname{im} L$, και βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του πυρήνα $\ker L$, και διανύσματα $v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}$ τέτοια ώστε, για κάθε $i = 1, \ldots, m$, $L(v_{n+i}) = w_i$. Θα δείξουμε οτι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}\}$$

είναι βάση του V.

Πρώτα δείχνουμε οτι το $\mathcal{B}$ παράγει το V. Έστω $v \in V$. Τότε $L(v) \in \operatorname{im} L$, και συνεπώς εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $w_1, \ldots, w_m$.

$$\begin{aligned} L(v) &= a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m \\ &= a_1 L_1(v_{n+1}) + \cdots + a_m L_m(v_{n+m}) \\ &= L(a_1 v_{n+1} + \cdots + a_m v_{n+m})\,. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε οτι $v - (a_1 v_{n+1} + \cdots + a_m v_{n+m}) \in \ker L$, και συνεπώς εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$,

$$v - (a_1 v_{n+1} + \cdots + a_m v_{n+m}) = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n\,.$$

Άρα $v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n + a_1 v_{n+1} + \cdots + a_m v_{n+m}$, και $v \in \langle v_1, \ldots, v_{n+m}\rangle$. Συνεπώς $V = \langle v_1, \ldots, v_{n+m}\rangle$.

Για να δείξουμε οτι $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, υποθέτουμε οτι $a_1 v_1 + \cdots + a_{n+m} v_{n+m} = 0$. Αλλά τότε

$$a_{n+1} v_{n+1} + \cdots + a_{n+m} v_{n+m} = -(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n)\,.$$

Εφαρμόζοντας την απεικόνιση L στις δύο πλευρές έχουμε

$$a_{n+1} w_1 + \cdots + a_{n+m} w_m = 0\,.$$

Όμως $\{w_1, \ldots, w_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και συνεπώς $a_{n+1} = \cdots = a_{n+m} = 0$. Αλλά τότε $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$, και από τη γραμμική ανεξαρτησία του $\{v_1, \ldots, v_n\}$ έχουμε $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Συμπεραίνουμε οτι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του V, και συνεπώς

$$\dim V = n + m = \dim\ker L + \dim\operatorname{im} L\,.$$

□

Πρόταση 7.6 *Εάν $L : V \longrightarrow W$ και $M : W \longrightarrow U$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε η σύνθεση $M \circ L$ είναι επίσης γραμμική απεικόνιση.*

Απόδειξη. Για κάθε $v_1, v_2 \in V$ και $a \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} M \circ L(a\, v_1 + v_2) &= M\,(a\, L(v_1) + L(v_2)) \\ &= a\, M\,(L(v_1)) + M\,(L(v_2)) \\ &= a\, M \circ L(v_1) + M \circ L(v_2)\,. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε οτι $M \circ L$ είναι γραμμική απεικόνιση.

$\square$

Γνωρίζουμε οτι τα γινόμενα ενός $m \times n$ πίνακα A με τα διανύσματα της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^n$, $e_{n1}, \ldots, e_{nn}$, είναι ακριβώς οι στήλες του πίνακα A. Συμπεραίνουμε οτι εάν προσδιορίσουμε τις τιμές που θα λάβει η γραμμική απεικόνιση T_A στα διανύσματα $e_{n1}, \ldots, e_{nn}$, μπορούμε να βρούμε τον πίνακα A, και συνεπώς τις τιμές της συνάρτησης T_A σε κάθε διάνυσμα. Θα δείξουμε οτι το ανάλογο ισχύει για κάθε βάση ενός διανυσματικού χώρου V, είτε αυτός έχει πεπερασμένη διάσταση είτε όχι: μπορούμε να προσδιορίσουμε αυθαίρετα τιμές στο W για κάθε διάνυσμα μίας βάσης, και υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση από το V στο W που παίρνει αυτές τις τιμές.

Παράδειγμα 7.19 Εάν $L : \mathbb{R}3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ είναι γραμμική απεικόνιση, και $L(1, 0, 0) = (1, 2)$, $L(0, 1, 0) = (3, -1)$ και $L(0, 0, 1) = (-1, 2)$, τότε η απεικόνιση L προκύπτει από πολλαπλασιασμό με τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Πρόταση 7.7 *Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V και W πάνω από το σώμα $\mathbb{R}$. Εάν $\mathcal{B}$ είναι βάση του V και $f : \mathcal{B} \longrightarrow W$ είναι απεικόνιση, τότε υπάρχει ακριβώς μία γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$ τέτοια ώστε για κάθε $v \in \mathcal{B}$, ισχύει $L(v) = f(v)$.*
Η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης $L : V \longrightarrow W$ είναι ο υπόχωρος του W που παράγεται από το σύνολο $f(\mathcal{B})$

Απόδειξη. Αφού $\mathcal{B}$ είναι βάση του V, κάθε διάνυσμα $u \in V$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της $\mathcal{B}$,

$$u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \,. \tag{7.1}$$

Υπενθυμίζουμε οτι ένας γραμμικός συνδυασμός είναι πεπερασμένο άθροισμα, ακόμη και όταν η βάση $\mathcal{B}$ είναι άπειρο σύνολο. Ορίζουμε $L(u) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$. Από τη μοναδικότητα του γραμμικού συνδυασμού 7.1, η L ορίζεται με μοναδικό τρόπο για κάθε $u \in V$, και συνεπώς είναι απεικόνιση. Εύκολα ελέγχουμε οτι είναι γραμμική.

Για να δείξουμε οτι είναι μοναδική, θεωρούμε μία γραμμική απεικόνιση $M : V \longrightarrow W$ τέτοια ώστε $M(v) = f(v)$ για κάθε $v \in \mathcal{B}$. Για κάθε $u \in V$, $u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ για $v_i \in \mathcal{B}$, και έχουμε

$$\begin{aligned} M(u) &= M(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) \\ &= a_1 M(v_1) + \cdots + a_n M(v_n) \\ &= a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n) \\ &= L(u) \,. \end{aligned}$$

Συνεπώς $M = L$.

Αφού για κάθε $u \in V$, το διάνυσμα $L(u)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $f(v_i)$, είναι προφανές οτι $\operatorname{im} L \subseteq \langle f(\mathcal{B}) \rangle$. Αντίθετα, εάν $w \in \langle f(\mathcal{B}) \rangle$, τότε $w = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$, για κατάλληλα $v_i \in \mathcal{B}$ και $a_i \in \mathbb{R}$, και συνεπώς

$$w = a_1 L(v_1) + \cdots + a_n L(v_n) = L(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) \in \operatorname{im} L\,.$$

□

Παράδειγμα 7.20 Στο διανυσματικό χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{R}[x]$ έχουμε δει την κανονική βάση $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$. Ορίζουμε

Αξίζει να διατυπώσουμε τις παραπάνω Προτάσεις στη ειδικότερη περίπτωση που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια, αυτή των χώρων πεπερασμένης διάστασης. Τότε μία βάση του V είναι πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ και η Πρόταση 7.7 λέει οτι μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε συλλογή διανυσμάτων $w_1, \ldots, w_n$, και τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση για την οποία $L(v_i) = w_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

7.2 Γραμμικές απεικονίσεις του επιπέδου

Στα παραδείγματα που δώσαμε στην αρχή του κεφαλαίου θεωρήσαμε την περιστροφή του επιπέδου κατά μία ορθή γωνία, την ανάκλαση στην ευθεία $x = y$, και την προβολή στον x-άξονα. Όμως μπορούμε να έχουμε περιστροφές κατά αυθαίρετες γωνίες, και προβολές ή ανακλάσεις σε οποιαδήποτε ευθεία που περιέχει το 0. Όλες αυτές οι απεικονίσεις είναι γραμμικές. Θα βρούμε τους πίνακες που τις αναπαριστούν, χρησιμοποιώντας την κανονική βάση $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ του $\mathbb{R}^2$.

Η **περιστροφή κατά γωνία** θ απεικονίζει το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ στο διάνυσμα $\begin{bmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{bmatrix}$, και το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ στο διάνυσμα $\begin{bmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{bmatrix}$, (δες Κεφάλαιο 1, σελίδα ;;).

Άρα ο πίνακας Q_ϑ που παριστάνει την περιστροφή του επιπέδου κατά γωνία ϑ, είναι ο

$$Q_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

Η γεωμετρική διαίσθηση μας λέει οτι η περιστροφή κατά γωνία ϑ είναι αντιστρέψιμη, και έχει αντίστροφο την περιστροφή κατά γωνία $-\vartheta$.

Παρατηρούμε οτι

$$Q_{-\vartheta} = \begin{bmatrix} \cos(-\vartheta) & -\sin(-\vartheta) \\ \sin(-\vartheta) & \cos(-\vartheta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix},$$

και πράγματι

$$Q_\vartheta\, Q_{-\vartheta} = \begin{bmatrix} \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta & \cos\vartheta\sin\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta & \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 7.1 Επαληθεύσατε οτι δύο περιστροφές κατά γωνία ϑ ισοδυναμούν με μία περιστροφή κατά γωνία 2ϑ, δηλαδή τη

$$Q_\vartheta^2 = Q_{2\vartheta}\,,$$

και οτι η περιστροφή κατα γωνία ϑ και μετά κατά γωνία φ, ισοδυναμεί με την περιστροφή κατά γωνία $\vartheta+\varphi$, δηλαδή οτι

$$Q_\varphi\, Q_\vartheta = Q_{(\vartheta+\varphi)}.$$

Η **προβολή** του διανύσματος $(1,\,0)$ στην ευθεία που σχηματίζει γωνία ϑ με τον x-άξονα (ας ονομάσουμε αυτή την ευθεία τον ϑ-άξονα) δίδει ένα διάνυσμα συγγραμμικό με το $(\cos\vartheta,\,\sin\vartheta)$, αλλά με μήκος $\cos\theta$. Δηλαδή το $(1,\,0)$ προβάλλεται στο διάνυσμα $(\cos^2\theta,\,\cos\theta\sin\theta)$. Παρόμοια, το διάνυσμα $(0,\,1)$ προβάλλεται στο διάνυσμα $(\sin\vartheta\,\cos\vartheta,\,\sin^2\vartheta)$.

Ο πίνακας που παριστάνει την *προβολή στον ϑ-άξονα* είναι λοιπόν ο

$$P_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos^2\vartheta & \cos\vartheta\sin\vartheta \\ \cos\vartheta\sin\vartheta & \sin^2\vartheta \end{bmatrix}.$$

Αυτός ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος. Τα σημεία του $\left(\vartheta+\dfrac{\pi}{2}\right)$-άξονα προβάλλονται στο 0. Ο μηδενοχώρος του πίνακα αποτελείται από τα πολλαπλάσια του διανύσματος

$$\left(\cos\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right),\,\sin\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-\sin\vartheta,\,\cos\vartheta)\,.$$

Η γεωμετρική διαίσθηση μας λέει οτι εάν προβάλλουμε δύο φορές, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με το να προβάλλουμε μία φορά:

$$(P_\vartheta)^2 = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} c^2(c^2+s^2) & cs(c^2+s^2) \\ cs(c^2+s^2) & s^2(c^2+s^2) \end{bmatrix} = P_\vartheta.$$

Η **ανάκλαση στον ϑ-άξονα**, αφήνει αμετάβλητα τα σημεία του ϑ-άξονα, και συνεπώς το διάνυσμα $(\cos\vartheta,\,\sin\vartheta)$ απεικονίζεται στον εαυτό του. Ένα διάνυσμα κάθετο στον ϑ-άξονα απεικονίζεται στο αντίθετο του, συνεπώς το $(-\sin\vartheta,\,\cos\vartheta)$ απεικονίζεται στο $(\sin\vartheta,\,-\cos\vartheta)$. Άρα ο πίνακας H_ϑ που παριστάνει την ανάκλαση ικανοποιεί

$$H_\vartheta \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} H_\vartheta &= \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2c^2-1 & 2cs \\ 2cs & 2s^2-1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Άσκηση 7.2 Επαληθεύσατε τον παραπάνω υπολογισμό του πίνακα H_ϑ.

Η γεωμετρική διαίσθηση μας λέει οτι δύο ανακλάσεις στον ίδιο άξονα επαναφέρουν την αρχική εικόνα, δηλαδή $(H_\vartheta)^2 = I$. Μπορούμε να επαληθεύσουμε αυτή την ιδιότητα με απ' ευθείας υπολογισμό.

Εναλλακτικά, παρατηρούμε οτι $H_\vartheta = 2P_\vartheta - I$, και συνεπώς έχουμε $(H_\vartheta)^2 = (2P_\vartheta - I)^2 = 4P_\vartheta^2 - 4P_\vartheta + I = I$ αφού $P_\vartheta^2 = P_\vartheta$.

Άσκηση 7.3 Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ παριστάνει μία **διαστολή** (stretching) στη διεύθυνση του $x-$άξονα. Σχεδιάστε τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, και γύρω του σημεία $(2x, y)$ που προκύπτουν από πολλαπλασιασμό με τον πίνακα A. Τι σχήμα έχει η καμπύλη που προκύπτει;

Άσκηση 7.4 Ποίος πίνακας παριστάνει την απεικόνιση που περιστρέφει κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ κατά μία ορθή, και στη συνέχεια προβάλλει πάνω στον $x-$άξονα; Ποιός πίνακας παριστάνει την απεικόνιση που προβάλλει στον $x-$άξονα και στη συνέχεια προβάλλει πάνω στον $y-$άξονα;

Άσκηση 7.5 Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ παριστάνει μία απεικόνιση **στρέβλωσης** (shearing), η οποία αφήνει τον $y-$άξονα αμετάβλητο. Σχεδιάστε το αποτέλεσμα αυτής της απεικόνισης στον $x-$άξονα, σημειώνοντας την εικόνα των σημείων $(1, 0)$, $(2, 0)$ και $(-1, 0)$, καθώς και την εικόνα όλου του $x-$άξονα.

Άσκηση 7.6 Ποιοί 3×3 πίνακες παριστάνουν τις ακόλουθες απεικονίσεις;

1. προβολή στο (x, y)-επίπεδο.
2. ανάκλαση στο (x, y)-επίπεδο.
3. την απεικόνιση που περιστρέφει το (x, y)-επίπεδο κατά μία ορθή γωνία, και αφήνει τα σημεία του z-άξονα αμετάβλητα.
4. την απεικόνιση που περιστρέφει το (x, y)-επίπεδο, κατόπιν το (x, z)-επίπεδο και κατόπιν το (y, z)-επίπεδο, όλα κατά μία ορθή γωνία.
5. την απεικόνιση που κάνει τις ίδιες τρείς περιστροφές, αλλά κατά γωνία ίση με δύο ορθές.

Άσκηση 7.7 Περιστροφές στο χώρο προσδιορίζονται από τον άξονα, του οποίου τα σημεία παραμένουν αμετάβλητα, και τη γωνία περιστροφής. Βρείτε τον άξονα και τη γωνία περιστροφής της απεικόνισης που απεικονίζει το (x_1, x_2, x_3) στο (x_2, x_3, x_1).

Άσκηση 7.8 Θεωρήστε την ''κυκλική'' απεικόνιση $g(v_1, v_2, v_3) = (v_3, v_1, v_2)$. Βρείτε το $g(g(g(v)))$ και το $g^{100}(v)$.

Άσκηση 7.9 Ποιος πίνακας παριστάνει την απεικόνιση που στέλνει το $(1, 0)$ στο $(2, 5)$ και το $(0, 1)$ στο $(1, 3)$; Ποιος πίνακας στέλνει το $(2, 5)$ στο $(1, 0)$ και το $(1, 3)$ στο $(0, 1)$; Γιατί δεν υπάρχει πίνακας που να απεικονίζει το $(2, 6)$ στο $(1, 0)$ και το $(1, 3)$ στο $(0, 1)$;

Άσκηση 7.10 Θεωρήστε όλα τα διανύσματα x στο τετράγωνο $\{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1,\, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ και ένα 2×2 πίνακα A.

1. Τι σχήμα έχει η εικόνα του τετραγώνου από την $x \mapsto Ax$;

2. Για ποιούς πίνακες A είναι η εικόνα τετράγωνο;

3. Για ποιούς πίνακες A είναι η εικόνα ένα ευθύγραμμο τμήμα;

4. Για ποιούς πίνακες A έχει η εικόνα εμβαδόν ίσο με 1;

7.3 Ισομορφισμοί

Ορισμός 7.4. Μια γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$ ονομάζεται **ισομορφισμός** εάν η L είναι αντιστρέψιμη, και η αντίστροφη απεικόνιση είναι επίσης γραμμική. Δηλαδή εάν υπάρχει $L^{-1} : W \longrightarrow V$ τέτοια ώστε $L \circ L^{-1} = \mathbf{I}_W$, $L^{-1} \circ L = \mathbf{I}_V$, και για κάθε $w_1, w_2 \in W$ και $a \in \mathbb{R}$,

$$L^{-1}(a\, w_1 + w_2) = a\, L^{-1}(w_1) + L^{-1}(w_2)\,.$$

Εάν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των διανυσματικών χώρων V και W, λέμε οτι οι χώροι V και W είναι **ισομορφικοί**, και το συμβολίζουμε $V \cong W$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα δείχνει οτι η υπόθεση να είναι η L^{-1} γραμμική είναι περιττή. Η αντίστροφη συνάρτηση κάθε γραμμικής συνάρτησης είναι γραμμική.

Λήμμα 7.8 *Η γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$ είναι ισομορφισμός εάν και μόνον εάν είναι αντιστρέψιμη.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση L^{-1}, και $L \circ L^{-1} = \mathbf{I}_W$.

Θεωρούμε $w_1, w_2 \in W$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε

$$L \circ L^{-1}(a\, w_1 + w_2) = \mathbf{I}_W(a\, w_1 + w_2) = a\, w_1 + w_2\,.$$

Επίσης, αφού η L είναι γραμμική,

$$\begin{aligned} L\left(a\, L^{-1}(w_1) + L^{-1}(w_2)\right) &= a\, L\left(L^{-1}(w_1)\right) + L\left(L^{-1}(w_2)\right) \\ &= a\, w_1 + w_2\,. \end{aligned}$$

Συνεπώς
$$L\left(L^{-1}(a\,w_1 + w_2)\right) = L\left(a\,L^{-1}(w_1) + L^{-1}(w_2)\right)$$
και αφού η L είναι αντιστρέψιμη,
$$L^{-1}(a\,w_1 + w_2) = a\,L^{-1}(w_1) + L^{-1}(w_2)\,.$$

□

Από την άποψη της Γραμμικής Άλγεβρας, δύο ισομορφικοί χώροι είναι πανομοιότυποι. Οποιαδήποτε ιδιότητα έχει ένα υποσύνολο X του V η οποία εκφράζεται αποκλειστικά μέσω γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του, την ίδια ιδιότητα έχει και η εικόνα Y του υποσυνόλου X στο W μέσω του ισομορφισμού L. Ειδικότερα δύο ισομορφικοί διανυσματικοί χώροι έχουν την ίδια διάσταση.

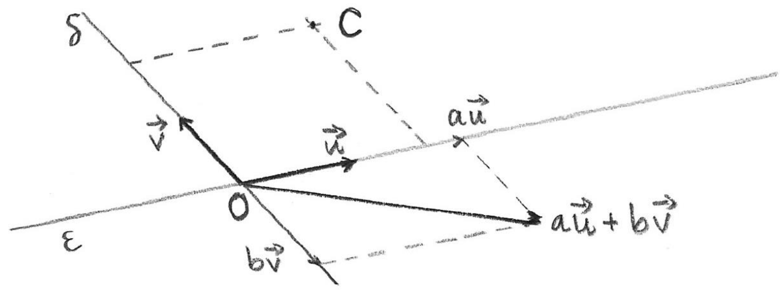
Πρόταση 7.9 *Εάν υπάρχει ισομορφισμός* $L : V \longrightarrow W$, *τότε* $\dim V = \dim W$.

Απόδειξη. Αφού L είναι ισομορφισμός, $\operatorname{im} L = W$ και $\operatorname{im} L^{-1} = V$, άρα $\dim W = \dim \operatorname{im} L$ και $\dim V = \dim \operatorname{im} L^{-1}$. Από το Λήμμα 7.4, $\dim \operatorname{im} L \leq \dim V$ και $\dim \operatorname{im} L^{-1} \leq \dim W$. Συνεπώς $\dim V \leq \dim W$ και $\dim W \leq \dim V$, δηλαδή $\dim V = \dim W$.

□

7.4 Συντεταγμένες ως προς βάση

Στο ''Επίπεδο και Χώροσ'' έχουμε δει οτι, από τη στιγμή που θα επιλέξουμε ένα σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$ στο επίπεδο, κάθε διάνυσμα $\vec{w} \in T_O E^2$ αντιστοιχεί στο μοναδικό διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών (a, b) για το οποίο $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Οι αριθμοί a, b) ονομάζονται *συντεταγμένες του διανύσματος* $\vec{w}$. Κάτι ανάλογο μπορούμε να κάνουμε σε οποιοδήποτε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης.



Σχήμα 7.1: Συντεταγμένες διανύσματος ως προς σύστημα αναφοράς στο επίπεδο.

Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V πάνω από το σώμα $\mathbb{R}$, $\dim V = n$, και μία βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ του V. Κάθε στοιχείο $w \in V$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$,

$$w = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n .$$

Εάν τώρα θεωρήσουμε το $\mathcal{B}$ ως ένα διατεταγμένο σύνολο, με τη διάταξη που προκύπτει από τους δείκτες 1, 2, …, n, σε κάθε διάνυσμα $w \in V$ αντιστοιχεί το διατεταγμένο σύνολο των n πραγματικών αριθμών, $(a_1, \ldots, a_n)$.

Το αριθμητικό διάνυσμα $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **διάνυσμα συντεταγμένων** του w ως προς τη διατεταγμένη βάση $\mathcal{B}$ και θα το συμβολίζουμε $w_{\mathcal{B}}$. Η αντιστοιχία $w \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$ είναι αμφιμονοσήμαντη: σε κάθε διάνυσμα του V αντιστοιχεί μοναδικό διάνυσμα συντεταγμένων στο $\mathbb{R}^n$, και σε κάθε αριθμητικό διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί μοναδικό διάνυσμα στο V. Αυτή η αντιστοιχία είναι πολύ σημαντική, γιατί μας επιτρέπει, αφού επιλέξουμε μία διατεταγμένη βάση σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V, να μεταφέρουμε ερωτήματα σχετικά με τα διανύσματα του V, σε ερωτήματα σχετικά με αριθμητικά διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, όπου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις υπολογιστικές μεθόδους της άλγεβρας πινάκων.

Στο $\mathbb{R}^3$ έχουμε την κανονική βάση $\mathcal{E}_3 = \{e_3 1, e_3 2, e_3 3\}$, όπου $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Ως προς τη βάση $\mathcal{E}_3$, κάθε διάνυσμα (x, y, z) έχει τον εαυτό του ως διάνυσμα συντεταγμένων:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

αλλά έχει διαφορετικές συντεταγμένες ως προς κάποια άλλη βάση.

Παράδειγμα 7.21 Το διάνυσμα $w = (2, 5, -3)$ έχει διάνυσμα συντεταγμένων $(2, 5, -3)$ ως προς την κανονική βάση, αφού

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Αλλά ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{(2, 1, 0), (1, 2, -1), (2, 0, 1)\}$, έχουμε

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

άρα το διάνυσμα συντεταγμένων του $w(2, 5, -3)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι $w_{\mathcal{B}} = (1, 2, -1)$.

Για να βρούμε το διάνυσμα συντεταγμένων (a, b, c) του διανύσματος $(2, 5, -3)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ λύσαμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε οτι εάν $\mathcal{B}$ είναι βάση, ο πίνακας που έχει ως στήλες τα διανύσματα του $\mathcal{B}$ είναι μη ιδιόμορφος, και η εξίσωση $Ax = b$ έχει μοναδική λύση για κάθε b.

Δραστηριότητα 7.2 Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του $u = (4, 5) \in \mathbb{R}^2$ ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{(\prime, \infty), (\in, \prime)\}$ του $\mathbb{R}^2$.
Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του $u = (4, 5) \in \mathbb{R}^2$ ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{(\in, \infty), (-\infty, \infty)\}$ του $\mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα 7.22 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}[x]_3$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με 3, έχουμε τη βάση $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Ως προς αυτή τη βάση, το διάνυσμα συντεταγμένων του πολυωνύμου είναι το σύνολο των συντελεστών του πολυωνύμου, με την κατάλληλη διάταξη. Το πολυώνυμο $p(x) = -5x^2 + x + 4$ έχει διάνυσμα συντεταγμένων ως προς τη βάση $\mathcal{C}$

$$p(x)_{\mathcal{C}} = (4, 1, -5, 0)\,.$$

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{B} = \{1, x-1, x^2-x, x^3-x^2\}$. Τα πολυώνυμα του συνόλου $\mathcal{B}$ έχουν διανύσματα συντεταγμένων ως προς τη βάση $\mathcal{C}$ τα $(1, 0, 0, 0)$, $(-1, 1, 0, 0)$, $(0, -1, 1, 0)$ και $(0, 0, -1, 1)$ αντίστοιχα. Αφού τα διανύσματα συντεταγμένων των στοιχείων του $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (ελέγξτε οτι ο αντίστοιχος πίνακας είναι μη ιδιόμορφος) συμπεραίνουμε οτι τα στοιχεία του $\mathcal{B}$ είναι γραμμικα ανεξάρτητα, και $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathbb{R}[x]_3$.

Το διάνυσμα συντεταγμένων (a, b, c, d) του $p(x)4$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, ικανοποιεί τη σχέση

$$a1 + b(x-1) + c(x^2 - x) + c(x^3 - x^2) = -5x^2 + x + 4\,.$$

Μπορούμε να το βρούμε υπολογίσουμε λύνωντας την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Λήμμα 7.10 *Η απεικόνιση $\iota_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ που απεικονίζει κάθε διάνυσμα $v \in V$ στο διάνυσμα συντεταγμένων $v_{\mathcal{B}}$ είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την κανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Θα δείξουμε οτι η απεικόνιση $\iota_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση που ορίζεται σύμφωνα με την Πρόταση 7.7 και απεικονίζει, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, το διάνυσμα v_i της βάσης $\mathcal{B}$ στο διάνυσμα $e_i \in \mathbb{R}^n$. Πράγματι, εάν $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$,

$$\iota_{\mathcal{B}}(v) = (a_1, \ldots, a_n) = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n\,.$$

Για να δείξουμε οτι η απεικόνιση $\iota_{\mathcal{B}}$ έχει αντίστροφο, ορίζουμε την απεικόνιση $\rho_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$, $\rho(x_1, \ldots, x_n) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$. Ελέγχουμε οτι $\rho_{\mathcal{B}} \circ \iota_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}_V$ και $\iota_{\mathcal{B}} \circ \rho_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}_{\mathbb{R}^n}$.

□

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια των προηγουμένων. Το διατυπώνουμε ως ένα Θεώρημα Δομής, δηλαδή ένα θεώρημα που ταξινομεί μία κατηγορία μαθηματικών αντικειμένων συγκρίνοντας τα με συγκεκριμένα αντικείμενα, τη δομή των οποίων καταλαβαίνουμε αρκετά ικανοποιητικά.

Θεώρημα 7.11 *Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω από το σώμα $\mathbb{R}$, και $\dim V = n$. Τότε ο V είναι ισομορφικός με το χώρο $\mathbb{R}^n$,*

$$V \cong \mathbb{R}^n \,.$$

□

Άσκηση 7.11 Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από τον εαυτό του. Δείξτε οτι κάθε γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι πολλαπλασιασμός με ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$, δηλαδή οτι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $Lx = ax$, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 7.12 Δείξτε οτι ο πολλαπλασιασμός με πολυώνυμο $p(x)$,

$$T_{p(x)} : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x] : q(x) \mapsto p(x)q(x) \,,$$

είναι γραμμική απεικόνιση.

Άσκηση 7.13 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές, και βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα τους.

1. $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad L(x, y) = (2x + 3y, x)$
2. $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad L(x, y) = (y, x + y + 1)$
3. $L : C^0(a, b) \longrightarrow C^0(a, b)$, $\quad L(f)(x) = (x^2 + 1)f(x)$
4. $L : C^0(a, b) \longrightarrow C^0(a, b)$, $\quad L(f) = |f|$.

Άσκηση 7.14 Δείξτε οτι δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε

$$\ker L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 = x_2,\, x_3 = x_4 = x_5\} \,.$$

Άσκηση 7.15 Θεωρούμε την απεικόνιση

$$L : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

η οποία ορίζεται με $L(z, w) = 3z - w$.

α′. Δείξτε οτι η L είναι γραμμική.

β′. Βρείτε τον υπόχωρο $\ker L$.

γ′. Βρείτε έναν υπόχωρο U τέτοιο ώστε $U \oplus \ker L = \mathbb{C}^2$.

Άσκηση 7.16 Θεωρούμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο πάνω απο το $\mathbb{R}$. Ποιές απο τις ακόλουθες απεικονίσεις $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι γραμμικές; Ποιές είναι ισομορφισμοί; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

α′. $(x, y) \mapsto x + \mathrm{i}y$

γ′. $(x, y) \mapsto \mathrm{i}(x + y)$

β′. $(x, y) \mapsto y + \mathrm{i}x$

δ′. $(x, y) \mapsto x + \mathrm{i}$

Άσκηση 7.17 Υποθέτουμε οτι X είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, και οτι V είναι υπόχωρος. Δείξτε οτι κάθε γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow Y$, μπορεί να επεκταθεί σε γραμμική απεικόνιση $\tilde{L} : X \longrightarrow Y$, δηλαδή υπάρχει γραμμική απεικόνιση $\tilde{L}$ τέτοια ώστε $\tilde{L}u = Lu$ για κάθε $u \in V$.

Άσκηση 7.18 Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$L(x, y, z, t) = (x + y, y - z, x + z)\,.$$

Δείξτε οτι η L είναι γραμμική, βρείτε βάσεις για τον πυρήνα $\ker L$ και την εικόνα $\operatorname{im} L$, και υπολογίστε την τάξη $\operatorname{rank}(L)$.

Άσκηση 7.19 Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1{+}x_3,\ -2x_1{+}x_2{+}x_5,\ x_1{+}x_3{+}x_4{+}2x_5,\ -2x_1{+}x_2{+}x_4{+}3x_5)$$

1. Βρείτε 4×5 πίνακα A τέτοιο ώστε $L(x) = Ax$.
2. Βρείτε βάσεις των υποχώρων $\ker L \subseteq \mathbb{R}^5$ και $\operatorname{im} L \subseteq \mathbb{R}^4$.
3. Βρείτε υπόχωρο V του $\mathbb{R}^5$ τέτοιο ώστε $V \oplus \ker L = \mathbb{R}^5$.
4. Δείξτε οτι $L|_V : V \longrightarrow \operatorname{im} L$ είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 7.20 Στον διανυσματικό χώρο $C^0(\mathbb{R})$ θεωρούμε την απεικόνιση $L : f \mapsto F$, όπου

$$F(x) = \int_0^x f(t)e^{-t^2}\,dt\,.$$

Δείξτε οτι L είναι γραμμική απεικόνιση από το $C^0(\mathbb{R})$ στο $C^0(\mathbb{R})$. Είναι η L επεικονική;

Άσκηση 7.21 Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης n, και γραμμικές απεικονίσεις L και M από τον V στον εαυτό του, με τις ιδιότητες

1. $L \circ M = 0$

2. $L + M$ είναι ισομορφισμός

Δείξτε οτι $\mathrm{rank}\,(L) + \mathrm{rank}\,(M) = n$.

Άσκηση 7.22 Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους U, V, W και γραμμικές απεικονίσεις $L \in \mathcal{L}(U, W), M \in \mathcal{L}(U, V)$, τέτοιες ώστε $\ker M \subseteq \ker L$. Δείξτε οτι τότε υπάρχει γραμμική απεικόνιση $N \in \mathcal{L}(V, W)$, τέτοια ώστε $L = N \circ M$.

Άσκηση 7.23 Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης, και γραμμικές απεικονίσεις L, $M \in \mathcal{L}(V)$. Δείξτε ότι

$$|\mathrm{rank}\,(L) - \mathrm{rank}\,(M)| \leq \mathrm{rank}\,(L + M) \leq \mathrm{rank}\,(L) + \mathrm{rank}\,(M).$$

Άσκηση 7.24 Στο χώρο $\mathbb{R}[x]$ όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές θεωρούμε την απεικόνιση παράγωγο $D : p \mapsto p'$. Δείξτε οτι η D είναι γραμμική επεικόνιση, αλλά δεν είναι ενεικόνιση. Τι συμπέρασμα βγάζετε για τη διάσταση του $\mathbb{R}[x]$;

Άσκηση 7.25 Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους U, V, W και γραμμικές απεικονίσεις $L \in \mathcal{L}(U, V)$, $M \in \mathcal{L}(V, W)$.

1. Δείξτε οτι
$$\ker(M \circ L) \subseteq L^{-1}(\ker M \cap \mathrm{im}\, L)\,.$$
Εάν επι πλέον οι U, V, W έχουν πεπερασμένη διάσταση, δείξτε οτι
$$\dim(\ker M \cap \mathrm{im}\, L) = r(L) - r(M \circ L)\,.$$

2. Εάν $U = V = W$ και $L \circ M = M \circ L$, δείξτε οτι $L(\ker M) \subseteq \ker M$ και $L(\mathrm{im}\, M) \subseteq \mathrm{im}\, M$.

Άσκηση 7.26 Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του $u = (6, -3, 1) \in \mathbb{R}^3$ ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (2, 1, -1), (2, 0, 0)\}$.

Άσκηση 7.27 Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του πολυωνύμου $p(x) = 3x^2 - 6x - 2$ ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{x^2, x-1, 2x\}$ του $\mathbb{P}_2$.

Άσκηση 7.28 Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V και δύο συμπληρωματικούς υπόχωρους X και Y του V. Αν $v \in V$ και $v = x + y$, με $x \in X$, $y \in Y$, ορίζουμε $P : V \longrightarrow V$ με $P(v) = x$. Δείξτε οτι P είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση, και οτι $P^2 = P$. Αυτή η απεικόνιση ονομάζεται προβολή του V στον X παράλληλα προς τον Y.

Άσκηση 7.29 Υποθέτουμε οτι $P : V \longrightarrow V$ είναι γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $P^2 = P$. Μία τέτοια απεικόνιση ονομάζεται προβολή. Δείξτε οτι $\ker P$ και $\operatorname{im} P$ είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι του V, και οτι P είναι η προβολή του V στον υπόχωρο $\operatorname{im} P$ παράλληλα προς τον υπόχωρο $\ker P$.
Δώστε ένα παράδειγμα απεικόνισης $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ τέτοιας ώστε $\ker L$ και $\operatorname{im} L$ να είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι, αλλά η L να μην είναι προβολή.

Άσκηση 7.30 Θεωρούμε ένα διάνυσμα $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $v_1 + v_2 + v_3 = 1$. Δείξτε οτι η απεικόνιση

$$P : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x - (x_1 + x_2 + x_3)v$$

είναι μία προβολή. Βρείτε τους υπόχωρους $\ker P$ και $\operatorname{im} P$.

Άσκηση 7.31 Στο χώρο $\mathbb{R}[x]_n$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με n, θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathbb{R}[x]_n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$L : p \mapsto \int_0^1 p(t)dt\,.$$

Θεωρούμε επίσης την απεικόνιση $Q : \mathbb{R}[x]_n \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{n+1}$ η οποία απεικονίζει το πολυώνυμο $p(x)$ στο πολυώνυμο

$$q(x) = \int_0^x p(t)dt\,.$$

1. Επαληθεύστε οτι η L είναι γραμμική απεικόνιση, και βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της.

2. Επαληθεύστε οτι η Q είναι γραμμική απεικόνιση, και δείξτε οτι

$$\operatorname{im} Q = \langle x,\, x^2,\, \ldots,\, x^{n+1} \rangle\,.$$

3. Αποδείξτε οτι για κάθε $p \in \mathbb{R}[x]_n$, ισχύει $L(p) = 0$ εάν και μόνον εάν

$$Q(p) \in \langle x(x-1),\, x^2(x-1),\, \ldots,\, x^n(x-1) \rangle\,.$$

4. Βρείτε μία βάση του $\ker L$.

Άσκηση 7.32 Επαληθεύστε οτι το σύνολο V των 2×2 πινάκων της μορφής $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ για $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$ είναι διανυσματικός χώρος.

Δείξτε οτι η απεικόνιση $M : \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a+c & b \\ b & a+b+c \end{bmatrix}$ είναι γραμμική, και βρείτε βάσεις των υπόχωρων $\ker M$ και $\operatorname{im} M$.

Κεφάλαιο 8

Γραμμικές Απεικονίσεις, Βάσεις, Πίνακες

Στην Πρόταση 7.2 είδαμε οτι κάθε γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό με ένα πίνακα A, $L = T_A$. Οι στήλες του πίνακα A είναι τα διανύσματα $L(e_j)$, όπου e_j είναι τα διανύσματα της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^n$. Θα δούμε οτι εάν επιλέξουμε βάσεις των διανυσματικών χώρων V και W, μπορούμε να παραστήσουμε οποιαδήποτε γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$ με ένα πίνακα.

8.1 Γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης V και W, και γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$.

Εάν επιλέξουμε μία βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ του V, γνωρίζουμε από το Λήμμα 7.10 οτι ορίζεται ισομορφισμός

$$\iota_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ο οποίος απεικονίζει κάθε διάνυσμα $v \in V$ στο *διάνυσμα συντεταγμένων* του v ως προς τη βάση $\mathcal{B}$: εάν $v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$, τότε

$$\iota_{\mathcal{B}}(v) = v_{\mathcal{B}} = (b_1, \ldots, b_n) .$$

Εάν επιλέξουμε μία βάση $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ του W, έχουμε επίσης τον ισομορφισμό

$$\iota_{\mathcal{C}} : W \longrightarrow \mathbb{R}^m ,$$

ο οποίος απεικονίζει το διάνυσμα $w = c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m$ στο διάνυσμα συντεταγμένων του w ως προς τη βάση $\mathcal{C}$,

$$\iota_{\mathcal{C}}(w) = w_{\mathcal{C}} = (c_1, \ldots, c_m) .$$

Εάν συνθέσουμε τη γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$ από τα δεξιά με τον ισομορφισμό $\iota_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ και από τα αριστερά με τον ισομορφισμό $\iota_{\mathcal{C}} : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$, έχουμε την απεικόνιση

$$\iota_{\mathcal{C}} \circ L \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \tag{8.1}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 7.2, αυτή η απεικόνιση αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό με ένα $m \times n$ πίνακα A, ο οποίος χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα: για κάθε διάνυσμα $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$A \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

εάν και μόνον εάν

$$L(b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) = c_1 w_1 + \ldots + c_m w_m \,.$$

Πιο αναλυτικά, για κάθε διάνυσμα v_j της βάσης $\mathcal{B}$ του V, το διάνυσμα $L(v_j) \in W$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης $\mathcal{C}$ του W. Γράφουμε $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ για το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} L(v_j) &= a_{1j} w_1 + \cdots + a_{mj} w_m \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \,. \end{aligned}$$

Ο $m \times n$ πίνακας

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

ονομάζεται **πίνακας της απεικόνισης** $L : V \longrightarrow W$ **ως προς τις βάσεις** $\mathcal{B}$ **του** V **και** $\mathcal{C}$ **του** W και θα τον συμβολίζουμε ${}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$. Ο πίνακας A έχει στη j στήλη το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$, και τα $(c_1, \ldots, c_m)$ ικανοποιούν τη σχέση

$$A \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

εάν και μόνον εάν

$$L(b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) = c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m \,.$$

Παρατήρηση: Προσέξτε τη σειρά των δεικτών, που δεν είναι αυτή που έχουμε συνηθίσει, π.χ. σε πολλαπλασιασμό πίνακα επί διάνυσμα: $(Ab)_i = \sum a_{ij} b_j$. Η διάταξη που χρησιμοποιήσαμε επιβάλλεται για να ταιριάζει ο πολλαπλασιασμός πινάκων με τη σύνθεση απεικονίσεων, όπως θα δούμε στο Θεώρημα 8.3. Η διάταξη των δεικτών αντιστρέφεται όταν περνάμε από διάνυσμα της βάσης σε διάνυσμα συντεταγμένων ως προς τη βάση.

Αντίστροφα, εάν $A = (a_{ij})$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας, γνωρίζουμε από την Πρόταση 7.7 οτι υπάρχει μία μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$L_A : V \longrightarrow W$$

τέτοια ώστε

$$L_A(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \ \text{ για } j = 1, \ldots, n \,. \tag{8.2}$$

Θεώρημα 8.1 *Θεωρούμε V και W διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ βάση του V, $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ βάση του W. Η αντιστοιχία $A \mapsto L_A$, όπου L_A είναι η απεικόνιση της (8.2), ορίζει έναν ισομορφισμό από το χώρο $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{R})$ στο χώρο $\mathcal{L}(V, W)$.*

Απόδειξη. Έχουμε δει οτι η αντιστοιχία είναι αμφιμονοσήμαντη. Αρκεί να ελέγξουμε οτι είναι γραμμική. Εάν $A, B \in \mathcal{M}(m, n, \mathbb{R})$ και $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L_{cA+B}(v_j) = \sum_{i=1}^{m}(ca_{ij} + b_{ij})w_i &= c\sum a_{ij}w_i + \sum b_{ij}w_i \\ &= cL_A(v_j) + L_B(v_j)\,. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 8.1 Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(u, v, w) = (u+v-w, 2u+w)$, και τις κανονικές βάσεις

$$\mathcal{E}_3 = \{e_{31}, e_{32}, e_{33}\}\ , \quad \text{όπου} \quad e_{31} = (1, 0, 0), e_{32} = (0, 1, 0), e_{33} = (0, 0, 1)\,,$$

του $\mathbb{R}^3$ και

$$\mathcal{E}_2 = \{e_{21}, e_{22}\}\ , \quad \text{όπου} \quad e_{21} = (1, 0,), e_{22} = (0, 1)\,,$$

του $\mathbb{R}^2$.

Ο πίνακας της L ως προς τις βάσεις $\mathcal{E}_3$ και $\mathcal{E}_2$ δίδεται από τις σχέσεις

$$L(e_{3j}) = \sum a_{ij}e_{2i} \qquad j = 1, 2, 3\,.$$

Για $j = 1$

$$L(1, 0, 0) = (1, 2) = a_{11}(1, 0) + a_{21}(0, 1)$$

άρα $a_{11} = 1$ και $a_{21} = 2$.

Για $j = 2$

$$L(0, 1, 0) = (1, 0) = a_{12}(1, 0) + a_{22}(0, 1)$$

άρα $a_{12} = 1$ και $a_{22} = 0$.

Για $j = 3$

$$L(0, 0, 1) = (-1, 1) = a_{13}(1, 0) + a_{23}(0, 1)$$

άρα $a_{13} = -1$ και $a_{23} = 1$.

Συνεπώς

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε οτι για το γενικό διάνυσμα $x = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, ισχύει

$$L(x) = \begin{bmatrix} u+v-w \\ 2u+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = Ax\,.$$

Δηλαδή ο πίνακας που αντιστοιχεί στην απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ως προς τις **κανονικές βάσεις**, είναι ακριβώς ο $m \times n$ πίνακας που δίδει την απεικόνιση L με πολλαπλασιασμό από τα αριστερά.

Τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε τον πίνακα της L ως προς κάποιες άλλες βάσεις, έστω τη βάση

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}\,, \quad \text{όπου} \quad v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (1, 0, 0)\,,$$

του $\mathbb{R}^3$, και τη βάση

$$\mathcal{C} = \{w_1, w_2\}\,, \quad \text{όπου} \quad w_1 = (1, 1), w_2 = (0, 1)\,,$$

του $\mathbb{R}^2$. Θέτουμε

$$_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}} = B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}.$$

Για το πρώτο διάνυσμα της $\mathcal{B}$ έχουμε

$$L(v_1) = L(1, 0, -1) = (2, 1) = 2(1, 1) - (0, 1) = 2w_1 - w_2\,,$$

άρα $b_{11} = 2$, $b_{21} = -1$. Για το δεύτερο

$$L(v_2) = L(1, 1, 1) = (1, 3) = (1, 1) + 2(0, 1) = w_1 + 2w_2\,,$$

άρα $b_{12} = 1$, $b_{22} = 2$, και για το τρίτο

$$L(v_3) = L(1, 0, 0) = (1, 2) = (1, 1) + (0, 1) = w_1 + w_2\,,$$

άρα $b_{13} = 1$, $b_{23} = 1$.

Ο πίνακας $_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$ της απεικόνισης $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^3$ και τη βάση $\mathcal{C}$ του $\mathbb{R}^2$ είναι ο πίνακας που έχει στη στήλη j τις συντεταγμένες του διανύσματος $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$

$$_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε οτι για να υπολογίσουμε τη στήλη j του πίνακα $_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$ λύνουμε την εξίσωση

$$Cx = L(v_j)\,,$$

όπου C είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα της βάσης $\mathcal{C}$.

Κατάλληλη επιλογή των βάσεων στους διανυσματικούς χώρους V και W μπορεί να απλοποιήσει τη μορφή του πίνακα $_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$, και να βοηθήσει στην επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων. Για παράδειγμα, μπορεί ο πίνακας να έχει κάποιες γραμμές ή κάποιες στήλες ίσες με μηδέν, ή εάν $m = n$ ο πίνακας μπορεί να είναι τριγωνικός ή διαγώνιος. Τέτοια ζητήματα θα μελετήσουμε στο μάθημα ‘‘Γραμμική Άλγεβρα Ι’’.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την αντιστοιχία μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων, για να βρούμε γενικές μεθόδους υπολογισμού μίας βάσης του πυρήνα ή της εικόνας μίας γραμμικής απεικόνισης μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης.

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V με βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ και W με βάση $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ καθώς και γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$. Έστω $A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$ ο πίνακας της L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$.

Υπενθυμίζουμε οτι για την απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax$, έχουμε:

- η εικόνα $\operatorname{im} T_A$ είναι ο χώρος στηλών του A, $\mathcal{R}(A)$, και μία βάση του $\operatorname{im} T_A$ δίδεται από τις στήλες του A που αντιστοιχούν σε στήλες του κλιμακωτού πίνακα U οι οποίες περιέχουν οδηγούς.

- ο πυρήνας $\ker T_A$ είναι ο μηδενοχώρος του A, $\mathcal{N}(A)$, και μία βάση του $\ker T_A$ δίδεται από ένα πλήρες σύστημα γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$.

Πως σχετίζονται αυτά με την εικόνα και τον πυρήνα της L;

Θεωρούμε τους ισομορφισμούς

$$\iota_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n : a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$$

και

$$\iota_{\mathcal{C}} : W \longrightarrow \mathbb{R}^m : b_1 w_1 + \ldots + b_m w_n \mapsto (b_1, \ldots, b_m)\,.$$

Από την 8.1 έχουμε $T_A = \iota_{\mathcal{C}} \circ L \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}$, και συνεπώς

$$L = \iota_{\mathcal{C}}^{-1} \circ T_A \circ \iota_{\mathcal{B}}\,.$$

Πόρισμα 8.2 *1.* $\ker L = \iota_{\mathcal{B}}^{-1}(\ker T_A) = \iota_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{N}(A))$. *Δηλαδή το διάνυσμα* $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ *ανήκει στον πυρήνα της* L *εάν και μόνον εάν* $(a_1, \ldots, a_n)$ *ανήκει στο μηδενόχωρο του πίνακα* A.

2. $\operatorname{im} L = \iota_{\mathcal{C}}^{-1}(\operatorname{im} T_A) = \iota_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathcal{R}(A))$. *Δηλαδή* $b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m$ *ανήκει στην εικόνα της* L *εάν και μόνον εάν* $(b_1, \ldots, b_m)$ *ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα* A.

□

Παράδειγμα 8.2 Θεωρούμε την προβολή P του επιπέδου στην ευθεία $\varepsilon : 3x - 2y = 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε κατάλληλη βάση για να βρούμε μία ιδιαίτερα απλή μορφή του πίνακα της προβολής. Ένα διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας ε είναι το $(2, 3)$, και $\mathcal{B} = \{(2, 3), (-3, 2)\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε οτι $P(2, 3) = (2, 3)$ και $P(-3, 2) = (0, 0)$. Άρα ο πίνακας της P ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ στο πεδίο ορισμού και στο πεδίο τιμών είναι

$${}_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}} = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8.2 Σύνθεση απεικονίσεων

Θεώρημα 8.3 *Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V, W, Z πεπερασμένης διάστασης, και βάσεις $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ και $\mathcal{D} = \{z_1, \ldots, z_\ell\}$ αντίστοιχα. Εάν $L : V \longrightarrow W$ και $M : W \longrightarrow Z$ είναι γραμμικές απεικονίσεις τότε*

$$_{\mathcal{D}}(M \circ L)_{\mathcal{B}} = _{\mathcal{D}} M_{\mathcal{C}}\, _{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}\,.$$

Πιο αναλυτικά, οι πίνακες A, B και C,

$$A = (a_{jk})_{\substack{k=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}} = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$$

$$B = (b_{ij})_{\substack{j=1,\ldots,m\\ i=1,\ldots,\ell}} = {}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{C}}$$

και

$$C = (c_{ik})_{\substack{k=1,\ldots,n\\ i=1,\ldots,\ell}} = {}_{\mathcal{D}}(M \circ L)_{\mathcal{B}},$$

ικανοποιούν τη σχέση

$$C = BA\,.$$

Δηλαδή

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, a_{jk}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, \ell$ και κάθε $k = 1, \ldots, n$, και

$$M \circ L(v_k) = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, a_{jk} \right) z_i\,.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό των A, B, C έχουμε

$$L(v_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} w_j \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$M(w_j) = \sum_{i=1}^{\ell} b_{ij} z_i \qquad j = 1, \ldots, m$$

και

$$M \circ L(v_k) = \sum_{i=1}^{\ell} c_{ik}\, z_i \qquad k = 1, \ldots, n$$

Αλλά

$$\begin{aligned} M \circ L(v_k) &= M\left(L(v_k)\right) \\ &= M\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\, w_j \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{m} a_{jk}\, M(w_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_{jk} \left(\sum_{i=1}^{\ell} b_{ij}\, z_i \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\ell} a_{jk}\, b_{ij}\, z_i \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, a_{jk} \right) z_i \,.
\end{aligned}
$$

Από τη μοναδικότητα των συντελεστών έχουμε

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, a_{jk}\,,$$

και συνεπώς $C = BA$.

$\square$

Πόρισμα 8.4 *Εάν $L : V \longrightarrow W$ είναι ισομορφισμός, και $A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$, τότε ο πίνακας της L^{-1}, ως προς τις ίδιες βάσεις, είναι ο A^{-1},*

$${}_{\mathcal{B}}(L^{-1})_{\mathcal{C}} = (\,{}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}})^{-1}\,.$$

Απόδειξη. Εάν $B = {}_{\mathcal{B}}(L^{-1})_{\mathcal{C}}$, τότε BA είναι ο πίνακας της απεικόνισης $L^{-1} \circ L = \mathbf{I}_V$, άρα $BA = \mathbf{I}$, και $B = A^{-1}$.

$\square$

8.3 Αλλαγή βάσης

Όπως είδαμε στην Παράγραφο 8.1, ο πίνακας της απεικόνισης $L : V \longrightarrow W$ εξαρτάται από την επιλογή της βάσης των διανυσματικών χώρων V και W. Τώρα θα εξετάσουμε πώς μεταβάλλονται οι συντεταγμένες των διανυσμάτων και ο πίνακας της L όταν αλλάξουμε τις βάσεις των χώρων V και W.

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V, και δύο διαφορετικές βάσεις του V,

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

και

$$\mathcal{B}' = \{x_1, \ldots, x_n\}\,.$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη σχέση ανάμεσα στις συντεταγμένες ενός διανύσματος $w \in V$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ και τις συντεταγμένες του w ως προς τη βάση $\mathcal{B}'$. Μπορούμε να γράψουμε το w ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης $\mathcal{B}$

$$w = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n\,,$$

αλλά και ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης $\mathcal{B}'$

$$w = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \,.$$

Το διάνυσμα συντεταγμένων του w ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι

$$w_{\mathcal{B}} = (a_1, \ldots, a_n)$$

ενώ το διάνυσμα συντεταγμένων του w ως προς τη βάση $\mathcal{B}'$ είναι

$$w_{\mathcal{B}'} = (c_1, \ldots, c_n) \,.$$

Θεωρούμε τον πίνακα B που παριστάνει την ταυτοτική απεικόνιση $\mathbf{I}_V$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'$ στο πεδίο ορισμού και $\mathcal{B}$ στο πεδίο τιμών:

$$B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} = {}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'} \,.$$

Οι όροι b_{ij} προσδιορίζονται από τις σχέσεις, για κάθε $j = 1, \ldots, n$

$$x_j = \mathbf{I}_V(x_j) = b_{1j}\, v_1 + \cdots + b_{nj}\, v_n \,. \tag{8.3}$$

Δηλαδή ο πίνακας B έχει στη j στήλη το διάνυσμα συντεταγμένων του $x_j \in \mathcal{B}'$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε τα c_j συναρτήσει των a_i και των b_{ij}. Έχουμε

$$\begin{aligned} w &= \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, c_j \right) v_i \,. \end{aligned}$$

Αλλά από τη μοναδικότητα των συντεταγμένων έχουμε

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, c_j \,, \tag{8.4}$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} .$$

Άρα το διάνυσμα συντεταγμένων c του w ως προς τη βάση $\mathcal{B}' = \{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι λύση της εξίσωσης

$$Bc = a \tag{8.5}$$

όπου a είναι το διάνυσμα συντεταγμένων του w ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου η 8.5 γίνεται

$$_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'}\, w_{\mathcal{B}'} = w_{\mathcal{B}}$$

Θα ονομάσουμε τον πίνακα $B = {}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'}$, οι συνιστώσες του οποίου δίδονται από την 8.3, **πίνακα μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}'$ στη βάση $\mathcal{B}$**, ορολογία που συμφωνεί με αυτήν που χρησιμοποιήσαμε στο μάθημα Επίπεδο και Χώρος.

Ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος, και ο αντίστροφος

$$B^{-1} = {}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}}$$

είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{B}'$.

Από την 8.5 βλέπουμε οτι το διάνυσμα συντεταγμένων του v ως προς τη βάση $\mathcal{B}'$ είναι

$$c = B^{-1} a\,.$$

Συνήθως είναι υπολογιστικά προτιμότερο να βρούμε το c λύνοντας την εξίσωση 8.5 χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss, παρά να υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα B^{-1}.

Παράδειγμα 8.3

Το επόμενο πρόβλημα που θα εξετάσουμε είναι η επίπτωση αλλαγής βάσεων στον πίνακα που παριστάνει μία γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης.

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V και W, και βάσεις $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ και $\mathcal{B}' = \{x_1, \ldots, x_n\}$ του V, και $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ και $\mathcal{C}' = \{y_1, \ldots, y_m\}$ του W.

Ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}'$ στη βάση $\mathcal{B}$ του V είναι

$$B = {}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'} = (b_{ij})$$

και ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{C}'$ στη βάση $\mathcal{C}$ του W είναι

$$C = {}_{\mathcal{C}}(\mathbf{I}_W)_{\mathcal{C}'} = (c_{k\ell})\,.$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, v_i \tag{8.6}$$

και για κάθε $\ell = 1, \ldots, m$ έχουμε

$$y_\ell = \sum_{k=1}^{m} c_{k\ell}\, w_k\,. \tag{8.7}$$

Θεωρούμε γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$, τον πίνακα A της απεικόνισης L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$,

$$A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}} = (a_{ki})_{\substack{k=1,\ldots,m\\ i=1,\ldots,n}}$$

και τον πίνακα D της απεικόνισης L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{C}'$,

$$D = {}_{\mathcal{C}'}L_{\mathcal{B}'} = (d_{\ell j})_{\substack{\ell=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} .$$

Από τον ορισμό των A και C, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ισχύει

$$L(v_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\, w_k \tag{8.8}$$

και για κάθε $j = 1, \ldots, n$ ισχύει

$$L(x_j) = \sum_{\ell=1}^{m} d_{\ell j}\, y_\ell \,. \tag{8.9}$$

Θέλουμε να εκφράσουμε τον D συναρτήσει των A, B και C.

Εφαρμόζουμε την απεικόνιση L στην (8.6)και αντικαθιστούμε το $L(v_j)$ από την (8.8):

$$\begin{aligned} L(x_j) &= L\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, L(v_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}\, w_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, b_{ij}\right) w_k \,. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Εξ άλλου, στην (8.9) αντικαθιστούμε το y_l από την (8.7):

$$\begin{aligned} L(x_j) &= \sum_{\ell=1}^{m} d_{\ell j}\, y_\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{m} d_{\ell j} \left(\sum_{k=1}^{m} c_{k\ell}\, w_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{\ell=1}^{m} c_{k\ell}\, d_{\ell j}\right) w_k \,. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Συγκρίνοντας τις 8.10 και 8.11 έχουμε, από τη μοναδικότητα των συντεταγμένων, για κάθε $j = 1, \ldots, n$ και $k = 1, \ldots, m$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, b_{ij} = \sum_{\ell=1}^{m} c_{k\ell}\, d_{\ell j} \,,$$

δηλαδή

$$AB = CD \,.$$

Συμπεραίνουμε οτι

$$D = C^{-1}AB\,, \tag{8.12}$$

ή, με το συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου,

$$_{\mathcal{C}'}L_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{C}'}(\mathbf{I}_W)_{\mathcal{C}}\ {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}\ {}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'}\,. \tag{8.13}$$

Παράδειγμα 8.4

Παράδειγμα 8.5

Άσκηση 8.1 Θεωρήστε το σύνολο $\mathcal{M}(m,\,n,\,\mathbb{R})$ των $m\times n$ πινάκων με όρους στο σώμα $\mathbb{R}$.

1. Δείξτε οτι $\mathcal{M}(m,\,n,\,\mathbb{R})$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$.
2. Εάν $A \in \mathcal{M}(n,\,\ell,\,\mathbb{R})$ δείξτε οτι η απεικόνιση $\mathcal{M}(m,\,n,\,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(m,\,\ell,\,\mathbb{R}) : B \mapsto BA$ είναι γραμμική.

Άσκηση 8.2 Θεωρήστε τον πίνακα με στοιχεία στο $\mathbb{Z}_3 = \{0,\,1,\,2\}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Φέρετε το πίνακα A σε κλιμακωτή μορφή, και βρείτε τις λύσεις (στο $(\mathbb{Z}_3)^3$) του συστήματος

$$A\,u = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 8.3 Βρείτε τον πίνακα της απεικόνισης $L(x,\,y,\,z) = (x{+}y,\,3y,\,x{+}2y{-}4z)$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Επαληθεύστε τον πίνακα που βρήκατε υπολογίζοντας το διάνυσμα $L(-1,\,5,\,2)$.

Άσκηση 8.4 Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$,

$$L(x_1,\,x_2,\,x_3) = (x_1,\,x_1 + x_2 - x_3,\,3x_1 - 5x_2,\,4x_2 - 2x_3)$$

Προσδιορίστε τον πίνακα A της L ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$. Βρείτε την τάξη του A, και μια βάση της εικόνας της L.

Άσκηση 8.5 Βρείτε τον πίνακα του τελεστή παραγώγισης D, που απεικονίζει το πολυώνυμο $p(x)$ στην παράγωγό του $Dp(x)$, ως προς τη βάση $\{2x^2,\,x,\,-1\}$ του $\mathbb{R}[x]_2$. Επαληθεύστε τον πίνακα που βρήκατε υπολογίζοντας το πολυώνυμο $D(3x^2 - 2x + 4)$.

Άσκηση 8.6 Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους U και V, πεπερασμένης διάστασης, και υπόχωρο X του U, $\dim X < \dim U$. Κατασκευάστε μία γραμμική απεικόνιση $L : U \longrightarrow V$, με $\ker L = X$.

Άσκηση 8.7 Βρείτε ένα ομογενές σύστημα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους, και πραγματικούς συντελεστές, του οποίου οι λύσεις είναι διανύσματα της μορφής $(\lambda, \lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 8.8 Στο διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{R}[x]_3$, θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις $L : p(x) \mapsto q(x) = p(x+1)$ και $M : p(x) \mapsto r(x) = p(x-1)$. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $Q_\lambda : V \longrightarrow V$ με $Q_\lambda = L + \lambda M$. Μελετήστε την τάξη του Q_λ ως συνάρτηση του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 8.9 Θεωρήστε το διανυσματικό χώρο όλων των 2×2 πινάκων, και τη γραμμική απεικόνιση $L : \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ που ορίζεται $L(X) = PX$, όπου $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Βρείτε τον 4×4 πίνακα της L ως προς την ακόλουθη βάση του $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Άσκηση 8.10 Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$

$$L : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a-d & -b-c \\ b+c & d-a \end{bmatrix}.$$

1. Δείξτε οτι η L είναι γραμμική απεικόνιση, και βρείτε τον πίνακα της L ως προς την βάση

$$\mathcal{E}_{2,2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

2. Βρείτε βάσεις των $\ker L$, $\operatorname{im} L$ και $\ker L \cap \operatorname{im} L$.

Άσκηση 8.11 Εάν σ είναι μια μετάθεση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$, (δηλαδή μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το σύνολο στον εαυτό του) ορίζουμε τον $n \times n$ πίνακα $A_\sigma = (a_{ij})$ με

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{εάν} \quad i = \sigma(j) \\ 0 & \text{εάν} \quad i \neq \sigma(j). \end{cases}$$

1. Βρείτε τους 3×3 πίνακες που αντιστοιχούν στις 6 διαφορετικές μεταθέσεις του $\{1, 2, 3\}$

2. Δείξτε οτι εάν τ είναι επίσης μετάθεση του $\{1, 2, \ldots, n\}$, τότε

$$A_{\sigma \circ \tau} = A_\sigma A_\tau.$$

Άσκηση 8.12 Ο πίνακας μίας γραμμικής απεικόνισης ως προς κάποια βάση, εξαρτάται από τη διάταξη των στοιχείων της βάσης. Τί συμβαίνει στον πίνακα μίας γραμμικής απεικόνισης $L : V \longrightarrow V$, ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, όταν μετατεθούν τα στοιχεία της $\mathcal{B}$; Ελέγξτε παραδείγματα δύο ή τριών διαστάσεων, και κατόπιν διατυπώστε μία εικασία, και αποδείξτε την.

Άσκηση 8.13 Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^4$ με τις κανονικές βάσεις $\mathcal{E}_3 = \{e_{31}, e_{32}, e_{33}\}$ και $\mathcal{E}_4 = \{e_{41}, e_{42}, e_{43}, e_{44}\}$.

1. Εάν $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ είναι η γραμμική απεικόνιση με πίνακα ως προς τις κανονικές βάσεις

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \end{bmatrix},$$

βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της L.

2. Δείξτε οτι το σύνολο $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, με

$$v_1 = e_{31} + e_{32} - 2e_{33} \quad , \quad v_2 = e_{31} + e_{32} + 2e_{33} \quad , \quad v_3 = -e_{31} + e_{32}$$

αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$. Εάν $M : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ είναι η γραμμική απεικόνιση με πίνακα ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{E}_4$ τον A, βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της M, και επαληθεύσατε οτι $L \neq M$.

Άσκηση 8.14 $\mathbb{R}[x]_k$ είναι ο χώρος των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με k, και $L : \mathbb{R}[x]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_1$ είναι η γραμμική απεικόνιση

$$L(ax^2 + bx + c) = ax + c$$

1. Βρείτε τον πίνακα της L ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{B}_2 = \{1, x, x^2\}$ του $\mathbb{R}[x]_2$ και $\mathcal{B}_1 = \{1, x\}$ του $\mathbb{R}[x]_1$.

2. Βρείτε τους πίνακες μετάβασης για τις βάσεις $\mathcal{B}_2' = \{1, x, x^2 + x\}$ του $\mathbb{R}[x]_2$ και $\mathcal{B}_1' = \{1, x - 1\}$ του $\mathbb{R}[x]_1$, και χρησιμοποιήστε τους για να υπολογίσετε τον πίνακα της L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_2'$ και $\mathcal{B}_1'$.

Άσκηση 8.15 Αποδείξτε οτι το σύνολο $\{1 + x, x + x^2, \ldots, x^{n-1} + x^n, x^n\}$ είναι μία βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}[x]_n$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με n.
Εάν $L : \mathbb{R}[x]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_3$ είναι η απεικόνιση $L(p) = xp'(x) + x^2p'(x)$ (όπου $p'(x)$ είναι η παράγωγος του πολυώνυμου $p(x)$) βρείτε τον πίνακα της L ως προς τις βάσεις

1. $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \quad , \quad \mathcal{C}_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$,

2. $\mathcal{B}_2 = \{1 + x, x + x^2, x^2\} \quad , \quad \mathcal{C}_2 = \{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3\}$.

Άσκηση 8.16 Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$L(x, y) = \left(\frac{23}{10}\, x + \frac{18}{5}\, y, \frac{18}{5}\, x + \frac{1}{5}\, y \right)$$

και η βάση $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}, \quad v_1 = (4, 3), \quad v_2 = \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.

1. Βρείτε τον πίνακα της L ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.

2. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα μετάβασης από την κανονική βάση στη $\mathcal{B}$, και τον αντίστροφο του, για να βρείτε τον πίνακα της L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Άσκηση 8.17 Θεωρούμε $m \times n$ πίνακα A με συντελεστές στο σώμα $\mathbb{R}$, τάξεως r, και τη γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ με πίνακα A ως προς τις κανονικές βάσεις του $\mathbb{R}^n$ και του $\mathbb{R}^m$. Αποδείξτε οτι υπάρχουν βάσεις $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^n$ και $\mathcal{C}$ του $\mathbb{R}^m$ τέτοιες ώστε ο πίνακας της L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ να είναι ο

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix},$$

όπου $\mathbf{I}_r$ είναι ο ταυτοτικός $r \times r$ πίνακας, και $\mathbf{0}_1$, $\mathbf{0}_2$, $\mathbf{0}_3$ είναι αντίστοιχα οι μηδενικοί $r \times (n - r)$, $(m - r) \times r$ και $(m - r) \times (n - r)$ πίνακες.

Άσκηση 8.18 Λέμε οτι δύο $m\times n$ πίνακες A και B είναι **ισοδύναμοι** εάν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q, μεγέθους $n \times n$ και $m \times m$ αντίστοιχα, τέτοιοι ώστε $B = Q^{-1}AP$.
Δείξτε οτι δύο πίνακες είναι ισοδύναμοι εάν και μόνον εάν έχουν την ίδια τάξη.

Άσκηση 8.19 Δίδονται οι διανυσματικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{R}$ που παράγονται από τις ακμές και τις κορυφές ενός 'πολυγώνου': C_1 με βάση $\{\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta,\, \varepsilon\}$ και C_0 με βάση $\{A,\, B,\, C,\, D\}$.
Θεωρούμε την απεικόνιση $\partial : C_1 \longrightarrow C_0$ η οποία ορίζεται

$$\begin{aligned} &\partial(b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma + b_4\delta + b_5\varepsilon) = \\ &= \ (b_4 - b_1)A + (b_1 - b_2 + b_5)B + (b_2 - b_3)C + (b_3 - b_4 - b_5)D\,. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της ομολογίας είναι προτιμότερο να εκφράσουμε την ∂ ως προς βάσεις του C_1 και του C_0 οι οποίες να περιέχουν τα διανύσματα $\beta+\gamma+\varepsilon$, $\alpha+\delta-\varepsilon$ και $B-A$, $C-B$, $D-C$, αντίστοιχα.

1. Βρείτε τις κατάλληλες βάσεις για το C_1 και το C_0, κατασκευάζοντας ταυτόχρονα τους πίνακες μετάβασης.

2. Βρείτε τον πίνακα ∂ ως προς τις αρχικές βάσεις, και λύστε το σύστημα με τους πίνακες μετάβασης για να υπολογίσετε τον πίνακα της απεικόνισης ∂ ως προς τις νέες βάσεις.