
Επίπεδο και Χώρος

Σημειώσεις μαθήματος MEM100

Αναλυτική Γεωμετρία και Μιγαδικοί Αριθμοί

Χρήστος Κουρουνιώτης

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ και
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

2018

Εισαγωγή

Ένα γεωμετρικό σχήμα στο επίπεδο είναι ένα σύνολο από σημεία του επιπέδου. Τα πιο απλά σχήματα είναι τα σημεία και οι ευθείες. Τα σημεία και οι ευθείες του ευκλείδειου επιπέδου ικανοποιούν κάποιες ιδιότητες, τα αξιώματα του ευκλείδειου επιπέδου, τα οποία διατυπώθηκαν από τον Ευκλείδη, και σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα από τον Hilbert, δες Παράρτημα 1. Όλα τα θεωρήματα της ευκλείδειας γεωμετρίας απορρέουν από αυτά τα αξιώματα.

Σε αυτό το μάθημα θα μελετήσουμε τη γεωμετρία σχημάτων του επιπέδου και του χώρου χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Θα αντιστοιχίσουμε τα σημεία του επιπέδου σε σύνολα αριθμών, και θα χρησιμοποιήσουμε αλγεβρικές σχέσεις μεταξύ αυτών των αριθμών για να περιγράψουμε τα σχήματα. Αρχική έννοια σε αυτή τη διαδικασία θα είναι η έννοια του γεωμετρικού διανύσματος.

Στα δύο πρώτα κεφάλαια των σημειώσεων θα εξετάσουμε τα διανύσματα στο επίπεδο και στο χώρο, και θα τα χρησιμοποιήσουμε για να μελετήσουμε ευθείες στο επίπεδο και επίπεδα ή ευθείες στο χώρο. Στα τελευταία κεφάλαια των σημειώσεων θα επανέλθουμε για να μελετήσουμε καμπύλες στο επίπεδο και επιφάνειες στο χώρο. Ενδιάμεσα, στο κεφάλαιο 3, θα εισαγάγουμε τους μιγαδικούς αριθμούς, που αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο για τη μελέτη της γεωμετρίας του επιπέδου. Θα εξετάσουμε τις βασικές ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών και θα τους χρησιμοποιήσουμε για να μελετήσουμε σχήματα και μετασχηματισμούς του επιπέδου.

Αυτές οι σημειώσεις αποτελούν απαραίτητο συμπλήρωμα των διαλέξεων του μαθήματος MEM100 Αναλυτική Γεωμετρία και Μιγαδικοί Αριθμοί που διδάσκεται στο Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης.

Οι σημειώσεις κάθε διάλεξης περιλαμβάνουν Δραστηριότητες, οι οποίες στοχεύουν στην καλύτερη κατανόηση των εννοιών και των τεχνικών που αναφέρονται στη διάλεξη. Γι' αυτό είναι απαραίτητο ο φοιτητής ή η φοιτήτρια να αφιερώνει λίγο χρόνο, το συντομότερο δυνατό μετά από κάθε διάλεξη, για να διαβάσει τις σημειώσεις της διάλεξης και να εκτελέσει τις αντίστοιχες δραστηριότητες.

Οι σημειώσεις συμπληρώνονται από ασκήσεις μετά τις διαλέξεις και στο τέλος κάθε κεφαλαίου. Αυτές δίδουν την ευκαιρία για καλύτερη κατανόηση και περαιτέρω διερεύνηση του περιεχομένου των διαλέξεων, καθώς και για επανάληψη πριν την περίοδο των εξετάσεων.

Κεφάλαιο 1

Γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζουμε τα γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο και τις πράξεις μεταξύ τους. Εξετάζουμε μία θεμελιώδη ιδιότητα της ευκλείδειας γεωμετρίας, τη δυνατότητα παράλληλης μεταφοράς, που μας επιτρέπει να ορίσουμε ελεύθερα διανύσματα, ανεξάρτητα από κάποιο σημείο εφαρμογής. Στη συνέχεια περιγράφουμε πώς η επιλογή ενός συστήματος αναφοράς ορίζει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του επιπέδου και διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών. Έτσι μπορούμε να περιγράψουμε γεωμετρικά σχήματα μέσω συνόλων τέτοιων ζευγών, και να μελετήσουμε τις ιδιότητές τους χρησιμοποιώντας αλγεβρικές μεθόδους. Εφαρμόζουμε αυτή τη διαδικασία στη μελέτη ευθειών και άλλων σχημάτων στο επίπεδο.

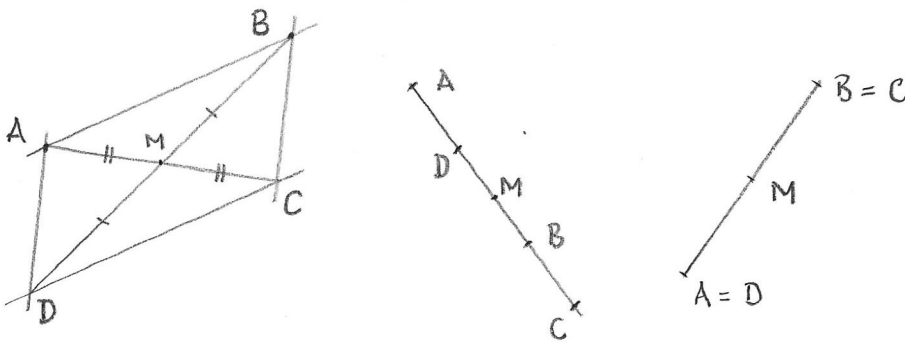
Διάλεξη 1

Παραλληλόγραμμο στο ευκλείδειο επίπεδο

Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία του Λυκείου γνωρίζουμε ότι ένα παραλληλόγραμμο $ABCD$ είναι ένα σχήμα που αποτελείται από τέσσερα σημεία A, B, C, D και τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα AB, BC, CD και DA , τέτοια ώστε η ευθεία AB είναι παράλληλη προς την ευθεία DC και η ευθεία BC είναι παράλληλη προς την ευθεία AD . Γνωρίζουμε επίσης ότι $ABCD$ είναι παραλληλόγραμμο εάν και μόνον εάν οι διαγωνίες AC και BD διχοτομούνται.

Σε αυτό το μάθημα θα χρησιμοποιήσουμε ως ορισμό ενός παραλληλογράμμου αυτή την ιδιότητα. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε ταυτόχρονα την περίπτωση που τα ευθύγραμμα τμήματα AB, BC, CD και DA βρίσκονται σε διαφορετικές παράλληλες ευθείες (γνήσιο παραλληλόγραμμο) καθώς και τις εκφυλισμένες περιπτώσεις όπου τα τέσσερα σημεία βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Ορισμός 1.1. Ένα σχήμα που αποτελείται από τέσσερα σημεία A, B, C, D και τα τμήματα των ευθειών AB, BC, CD και DA που τα συνδέουν, ονομάζεται **παραλληλόγραμμο** εάν το μέσο M του διαστήματος AC συμπίπτει με το μέσο του BD , (Σχήμα 1.1). Αυτό το παραλληλόγραμμο το συμβολίζουμε $ABCD$. Τα ευθύγραμμα τμήματα AB, BC, CD και DA είναι οι πλευρές του παραλληλογράμμου $ABCD$, ενώ τα σημεία A, B, C, D είναι οι κορυφές του παραλληλογράμμου $ABCD$.



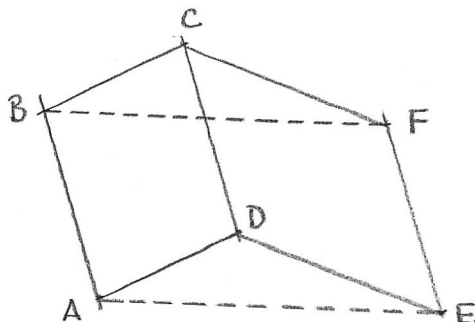
Σχήμα 1.1: Παραλληλόγραμμο.

Τα σύμβολα $ABCD, BCDA, CDAB, DABC, ADCB, DCBA, CBAD$ και $BADC$ δηλώνουν όλα το ίδιο παραλληλόγραμμο, με διαγωνίους AC και BD . Παρατηρήστε ότι το $ABCD$ και το $ABDC$ είναι και τα δύο παραλληλόγραμμα μόνον όταν $A = B$ και $C = D$.

Δραστηριότητα 1.1 Σημειώστε τρία σημεία στο επίπεδο, A, B, C που να μην βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Πόσα διαφορετικά παραλληλόγραμμα μπορείτε να σχεδιάσετε που να έχουν τα σημεία A, B, C ως τρεις από τις κορυφές τους (όχι υποχρεωτικά με αυτή τη σειρά); Προσπαθήστε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό.

Από αυτόν τον ορισμό μπορούμε να αποδείξουμε όλες τις γνωστές ιδιότητες των παραλληλογράμων. Θα χρησιμοποιήσουμε χωρίς απόδειξη το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.1 Εάν τα σχήματα $ABCD$ και $CDEF$ είναι παραλληλόγραμμα, τότε παραλληλόγραμμα είναι και το σχήμα $ABFE$.



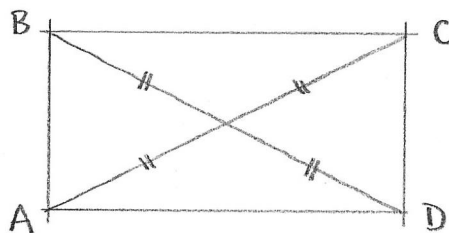
Σχήμα 1.2: Πρόταση 1.1.

Θα ορίσουμε επίσης το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Αυτό θα μας επιτρέψει να μιλήσουμε για ευθείες που τέμνονται κάθετα, πριν δώσουμε το γενικό ορισμό της γωνίας μεταξύ δύο ευθειών.

Ορισμός 1.2. Ένα παραλληλόγραμμο $ABCD$ ονομάζεται **ορθογώνιο παραλληλόγραμμο** εάν το μήκος της διαγωνίου AC είναι ίσο με το μήκος της διαγωνίου BD . Σε ένα μη εκφυλισμένο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, οι ευθείες που περιέχουν τις πλευρές AB και AD λέμε ότι είναι **κάθετες** ή ότι σχηματίζουν **ορθή γωνία**.

Δραστηριότητα 1.2 Πότε είναι ένα εκφυλισμένο παραλληλόγραμμο “ορθογώνιο” σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό; Μπορούμε σε αυτή την περίπτωση να μιλήσουμε για κάθετες ευθείες;

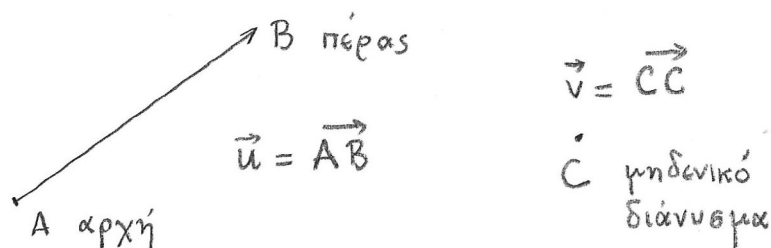
Δραστηριότητα 1.3 Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ABCD$. Είναι κάποιο από τα άλλα παραλληλόγραμμα με κορυφές A, B, C (όπως στη Δραστηριότητα 1.1) ορθογώνιο;



Σχήμα 1.3: Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο.

Ένα **γεωμετρικό διάνυσμα** είναι ένα βέλος, ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω στο οποίο διακρίνουμε τα δύο άκρα, και ονομάζουμε το ένα **αρχή** και το άλλο **πέρας**, (Σχήμα 1.4). Θεωρούμε επίσης **μηδενικά διανύσματα**, στα οποία η αρχή και το πέρας συμπίπτουν. Χρησιμοποιούμε γράμματα του λατινικού αλφαβήτου επιγραμμισμένα με βέλος για να συμβολίσουμε διανύσματα: $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...



Σχήμα 1.4: Διανύσματα.

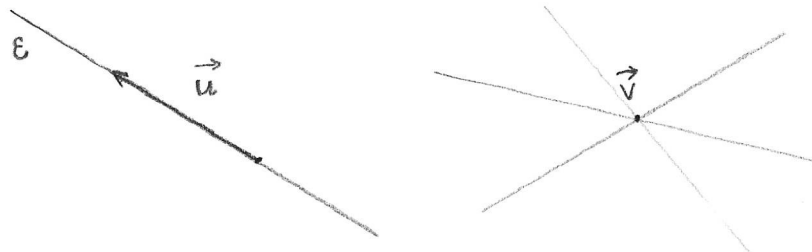
Αρχικά θα εξετάσουμε γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο, δηλαδή βέλη που εφάπτονται στην επιφάνεια ενός επιπέδου. Το σημείο του επιπέδου στο οποίο βρίσκεται η αρχή του διανύσματος το ονομάζουμε **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος. (Τα γεωμετρικά διανύσματα ονομάζονται επίσης **εφαρμοστά** διανύσματα, ή **εφαπτόμενα** διανύσματα).

Εάν η αρχή του γεωμετρικού διανύσματος $\vec{u}$ βρίσκεται στο σημείο A και το πέρας του βρίσκεται στο σημείο B του επιπέδου, συμβολίζουμε εναλλακτικά το διάνυσμα με $\overrightarrow{AB}$. Το μηδενικό διάνυσμα με σημείο εφαρμογής το A , το συμβολίζουμε $\overrightarrow{AA}$. Προσέξτε ότι έχουμε ένα διαφορετικό μηδενικό γεωμετρικό διάνυσμα σε κάθε σημείο του επιπέδου.

Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ονομάζουμε **μέτρο** (ή **μήκος**) του διανύσματος $\vec{u}$ την απόσταση μεταξύ

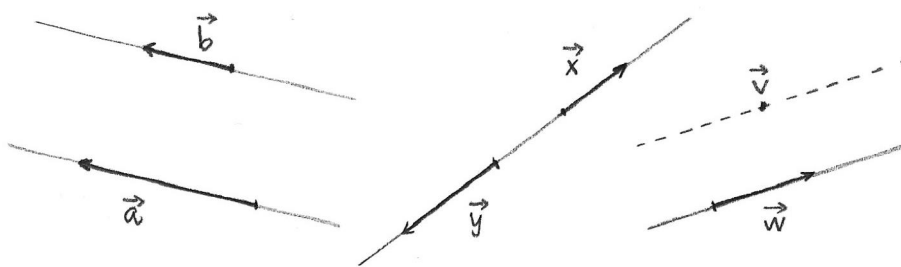
των άκρων του ευθύγραμμου τμήματος AB . Το μέτρο του $\vec{u}$ συμβολίζεται $|\vec{u}|$:

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= |AB| \\ &= \text{απόσταση από το } A \text{ στο } B. \end{aligned}$$



Σχήμα 1.5: Φορέας διανύσματος.

Εάν $\vec{u}$ δεν είναι μηδενικό διάνυσμα, τότε υπάρχει μοναδική ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το $\vec{u}$, η οποία ονομάζεται **φορέας** του $\vec{u}$, (Σχήμα 1.5). Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος θεωρούμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο εφαρμογής του.



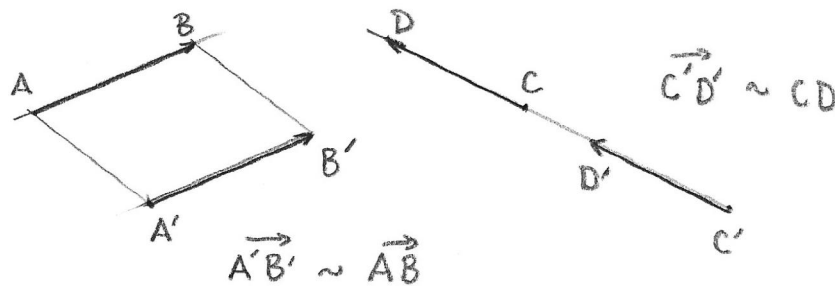
Σχήμα 1.6: Παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα.

Δύο διανύσματα που έχουν το ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, ονομάζονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά**, (Σχήμα 1.6). Προσέξτε ότι δεν διακρίνουμε τις δύο περιπτώσεις, και ο όρος συγγραμμικά χρησιμοποιείται τόσο όταν τα διανύσματα βρίσκονται στην ίδια ευθεία όσο και όταν βρίσκονται σε παράλληλες ευθείες. Παρατηρούμε ότι ένα μηδενικό διάνυσμα είναι παράλληλο προς οποιοδήποτε διάνυσμα του επιπέδου. Όταν δύο διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι παράλληλα λέμε ότι έχουν την **ίδια διεύθυνση** και γράφουμε $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Παράλληλη μεταφορά

Μία σημαντική ιδιότητα των γεωμετρικών διανυσμάτων στο επίπεδο είναι ότι μπορούμε να τα μεταφέρουμε παράλληλα. Η διαισθητική έννοια είναι ότι μετακινούμε το διάνυσμα σε ένα άλλο σημείο εφαρμογής, χωρίς να το περιστρέψουμε.

Ορισμός 1.3. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, και ένα σημείο A' του επιπέδου, (Σχήμα 1.7). Λέμε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ προκύπτει με **παράλληλη μεταφορά** του $\overrightarrow{AB}$ στο A' , εάν το σημείο B' είναι τέτοιο ώστε $ABB'A'$ είναι παραλληλόγραμμο. Εάν το διάνυσμα $\overrightarrow{CD}$ προκύπτει από το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με παράλληλη μεταφορά, λέμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ είναι **ισοδύναμα**, και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$. Όλα τα μηδενικά διανύσματα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους.



Σχήμα 1.7: Παράλληλη μεταφορά διανυσμάτων.

Παρατηρήστε ότι εάν το A' βρίσκεται στο φορέα του $\overrightarrow{AB}$, τότε το παραλληλόγραμμο $ABB'A'$ είναι εκφυλισμένο και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$ έχουν τον ίδιο φορέα.

Μία απλή αλλά σημαντική συνέπεια της Πρότασης 1.1 είναι ότι εάν δύο διανύσματα είναι ισοδύναμα με ένα τρίτο, τότε είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα. Πιο συγκεκριμένα:

Λήμμα 1.2 Εάν το διάνυσμα $\vec{u}$ προκύπτει με παράλληλη μεταφορά από το $\vec{v}$, και το $\vec{w}$ προκύπτει με παράλληλη μεταφορά από το $\vec{u}$, τότε το $\vec{w}$ προκύπτει με παράλληλη μεταφορά από το $\vec{v}$,

$$\vec{v} \sim \vec{u} \text{ και } \vec{u} \sim \vec{w} \implies \vec{v} \sim \vec{w}.$$

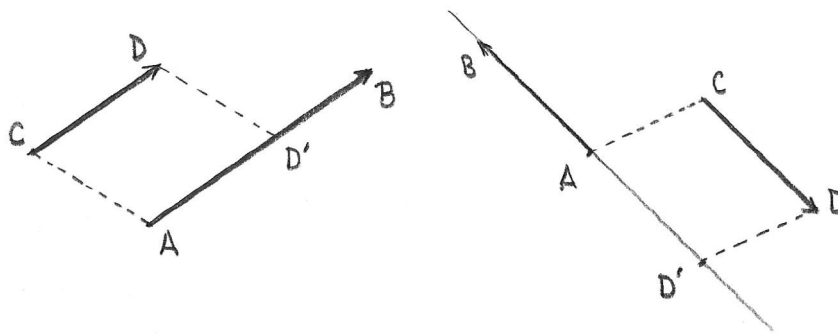
Δραστηριότητα 1.4 Σημειώστε τέσσερα τυχαία σημεία A, B, C, D στο επίπεδο (λέγοντας ‘τυχαία’ εδώ εννοούμε ότι είναι όλα διαφορετικά, και τα διανύσματα που σχηματίζονται με αρχή σε ένα από τα 4 σημεία και πέρας σε ένα άλλο από αυτά δεν είναι παράλληλα και έχουν όλα διαφορετικά μέτρα).

α’. Καταγράψτε όλα (τα 16) διαφορετικά διανύσματα με άκρα στα σημεία A, B, C, D .

β’. Σχεδιάστε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{CE}$ που είναι ισοδύναμο με το $\overrightarrow{AB}$. Σχεδιάστε και το $\overrightarrow{DF} \sim \overrightarrow{AC}$.

Ομόρροπα διανύσματα

Ένα μη μηδενικό διάνυσμα καθορίζει μία φορά, έναν προσανατολισμό, πάνω στο φορέα του.



Σχήμα 1.8: Ομόρροπα και αντίρροπα διανύσματα.

Ορισμός 1.4. Θεωρούμε δύο μη μηδενικά παράλληλα διανύσματα, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ και μεταφέρουμε παράλληλα το $\overrightarrow{CD}$ στο $\overrightarrow{AD'}$, (Σχήμα 1.8).

α’. Εάν το σημείο D' βρίσκεται στην ημιευθεία από το A που περιέχει το B , λέμε ότι τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι **ομόρροπα**, ή ότι **έχουν την ίδια φορά**

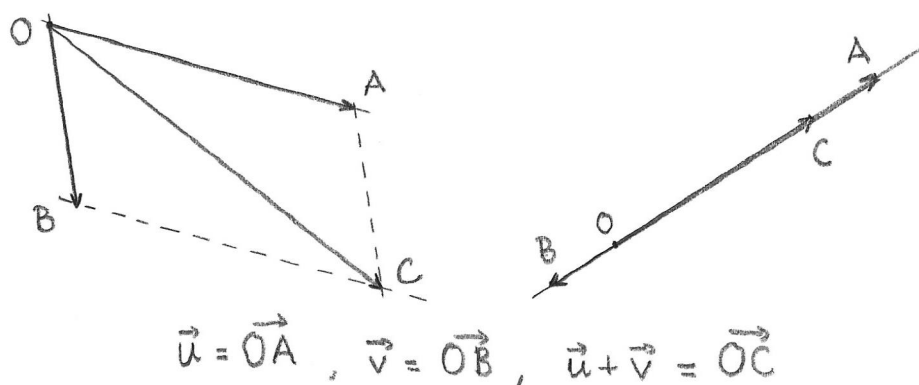
β’. Εάν το σημείο D' δεν βρίσκεται στην ημιευθεία από το A που περιέχει το B , λέμε ότι τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι **αντίρροπα**, ή ότι **έχουν αντίθετη φορά**

Δραστηριότητα 1.5 Σχεδιάστε ένα (γνήσιο) παραλληλόγραμμο $ABCD$ και καταγράψτε τα 12 μη μηδενικά διανύσματα με άκρα στις κορυφές του παραλληλογράμμου. Βρείτε δύο ζεύγη τέτοιων διανυσμάτων που είναι παράλληλα και ομόρροπα. Βρείτε δύο ζεύγη τέτοιων διανυσμάτων που είναι παράλληλα και αντίρροπα.

Πράξεις με διανύσματα

Σε αυτήν και τις επόμενες παραγράφους θα δούμε πώς μπορούμε να ορίσουμε πράξεις με διανύσματα. Ο κανόνας του παραλληλόγραμμου για τη σύνθεση δύο κινήσεων ή δύο δυνάμεων είναι γνωστός από την αρχαιότητα. Δίδει μια χρήσιμη πράξη στο σύνολο των γεωμετρικών διανυσμάτων με το ίδιο σημείο εφαρμογής.

Αρχικά θα ορίσουμε τις πράξεις μόνο για διανύσματα με το ίδιο σημείο εφαρμογής, (προσθέτουμε ‘ομοειδή’ αντικείμενα), ενώ αργότερα θα δούμε πώς να αποτινάξουμε αυτόν τον περιορισμό. Θεωρούμε λοιπόν ένα σημείο O του επιπέδου, και περιοριζόμαστε σε γεωμετρικά διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O .



Σχήμα 1.9: Άθροισμα διανυσμάτων.

Ορισμός 1.5. Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ είναι διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O , ορίζουμε το **άθροισμα** $\vec{u} + \vec{v}$ να είναι το γεωμετρικό διάνυσμα με αρχή στο O και πέρας στο σημείο C για το οποίο $OACB$ είναι παραλληλόγραμμο, (Σχήμα 1.9).

Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ είναι συγγραμμικά, τότε το σημείο C για το οποίο $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OC}$, προσδιορίζεται και από τις σχέσεις $|AC| = |OB|$ και $|BC| = |OA|$.

Δραστηριότητα 1.6 Σχεδιάστε τρία σημεία A, B, C που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και θεωρήστε $D, D', \dots$ τις κορυφές των παραλληλογράμμων που βρήκατε στη Δραστηριότητα 1.1. Για κάθε ένα από αυτά τα παραλληλόγραμμα γράψτε το άθροισμα των δύο διανυσμάτων που αντιστοιχούν στις πλευρές του παραλληλογράμμου που έχουν κοινή αρχή στο σημείο A . Για παράδειγμα, εάν $ABCD$ είναι ένα από τα παραλληλόγραμμα, το αντίστοιχο άθροισμα είναι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα $\vec{u} + \vec{u}$ έχει το ίδιο σημείο εφαρμογής και την ίδια φορά με το $\vec{u}$, αλλά διπλάσιο μήκος. Μπορούμε να γενικεύσουμε αυτή την έννοια του πολλαπλασίου, με τρόπο που να είναι συμβατός με την πράξη της πρόσθεσης.

Ορισμός 1.6. Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και a είναι πραγματικός αριθμός, $a \in \mathbb{R}$, ορίζουμε το **πολλαπλάσιο** $a\vec{u}$ να είναι το διάνυσμα με σημείο εφαρμογής O , μήκος $|a||\vec{u}|$ και τον ίδιο φορά με το $\vec{u}$, ($|a|$ είναι η απόλυτη τιμή του a). Η φορά του $a\vec{u}$ είναι η ίδια με αυτήν του $\vec{u}$ εάν $a > 0$, και η αντίθετη εάν $a < 0$.

Δραστηριότητα 1.7 Σημειώστε τρία σημεία A, B, C που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και σχεδιάστε τα διανύσματα

$$\begin{array}{lll} \alpha') \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, & \beta') \quad 2\overrightarrow{AB}, & \gamma') \quad \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}), \\ \delta') \quad \overrightarrow{AC} + (-\overrightarrow{AB}), & \epsilon') \quad 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, & \zeta') \quad 2\overrightarrow{AC} + (-1\overrightarrow{AB}). \end{array}$$

Η ακόλουθη πρόταση συνοψίζει τις βασικές ιδιότητες των πράξεων που ορίσαμε.

Πρόταση 1.3 Θεωρούμε τα γεωμετρικά διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ με σημείο εφαρμογής το O , και τους αριθμούς $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha'. \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$\beta'. \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$\gamma'. \quad \vec{u} + \overrightarrow{OO} = \vec{u}$$

$$\delta'. \quad 1\vec{u} = \vec{u} \text{ και } 0\vec{u} = \overrightarrow{OO}$$

$$\epsilon'. \quad (ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$$

$$\zeta'. \quad (a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$

$$\eta'. \quad a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

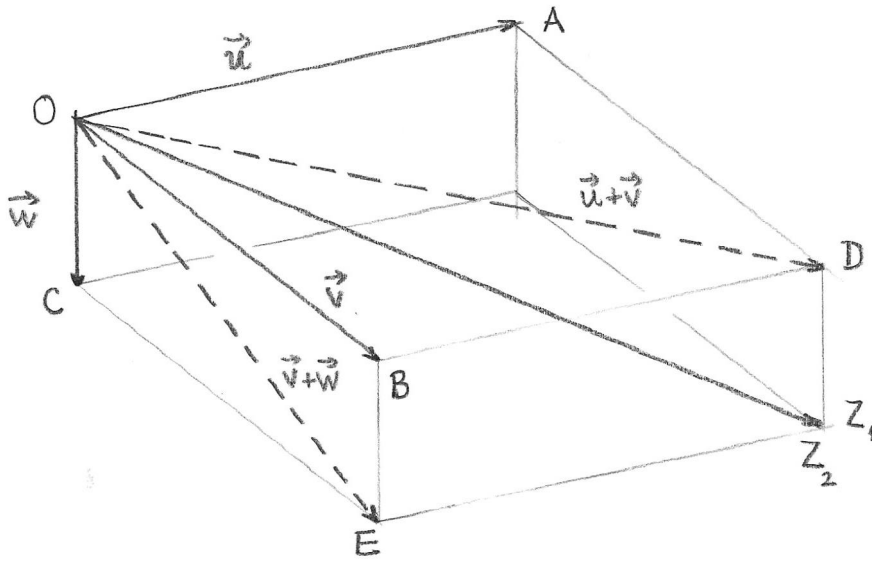
Απόδειξη. Η απόδειξη των περισσότερων ιδιοτήτων είναι απλή. Θα δώσουμε μόνο την απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας. Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$, τότε D, E, Z_1 και Z_2 είναι τα σημεία που προσδιορίζονται από τις ακόλουθες ισότητες, (Σχήμα 1.10):

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} & \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} \\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} & \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OZ_2} \end{array}$$

και έχουμε

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \overrightarrow{OZ_1}, \quad \text{και} \quad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{OZ_2}.$$

Το σημείο Z_2 χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι το τετράπλευρο OAZ_2E είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς για να δείξουμε ότι $\overrightarrow{OZ_1} = \overrightarrow{OZ_2}$, αρκεί να δείξουμε ότι OAZ_1E είναι επίσης παραλληλόγραμμο, δηλαδή να δείξουμε ότι το μέσο του OZ_1 συμπίπτει με το μέσο του AE . Αλλά ODZ_1C είναι παραλληλόγραμμο, από τον ορισμό του Z_1 , άρα το μέσο του OZ_1 συμπίπτει με το μέσο του CD . Άρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το μέσο του CD συμπίπτει με το μέσο του AE , δηλαδή ότι $ACED$ είναι παραλληλόγραμμο. Αλλά $OCEB$ και $OBDA$ είναι παραλληλόγραμμα, από τον ορισμό των E και D αντίστοιχα. Συνεπώς, από την Πρόταση 1.1,



Σχήμα 1.10: Η προσεταιριστική ιδιότητα.

$ACED$ είναι επίσης παραλληλόγραμμο.

□

Το διάνυσμα $(-1)\vec{u}$ ικανοποιεί τη σχέση $\vec{u} + (-1)\vec{u} = \vec{OO}$. Ονομάζεται **αντίθετο** του $\vec{u}$, και συμβολίζεται $-\vec{u}$. Χρησιμοποιούμε επίσης το συμβολισμό της αφαίρεσης, $\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$.

Δραστηριότητα 1.8 Σημειώστε τρία σημεία A, B, C που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και σχεδιάστε τα διανύσματα

$$\alpha') \quad \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}, \quad \beta') \quad \overrightarrow{AC} + (2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}), \quad \gamma') \quad 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}.$$

Εάν μεταφέρουμε παράλληλα δύο γεωμετρικά διανύσματα με κοινή αρχή, τότε το παραλληλόγραμμο που σχηματίζουν μεταφέρεται στο νέο σημείο εφαρμογής, και το άθροισμά τους, που προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, μεταφέρεται επίσης παράλληλα, όπως ελέγχουμε στην ακόλουθη Δραστηριότητα.

Δραστηριότητα 1.9 Σημειώστε 4 σημεία O, A, B, C και σχεδιάστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ και το άθροισμα $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Μεταφέρετε παράλληλα τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AC}$ στο σημείο O , δηλαδή σχεδιάστε τα διανύσματα $\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}$ τα οποία είναι ισοδύναμα προς τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AC}$ αντίστοιχα, (θα πρέπει να σχηματίζονται παραλληλόγραμμα $ABB'O$ και $ACC'O$). Σχεδιάστε το άθροισμα $\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$ και ελέγξτε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το $\overrightarrow{AD}$.

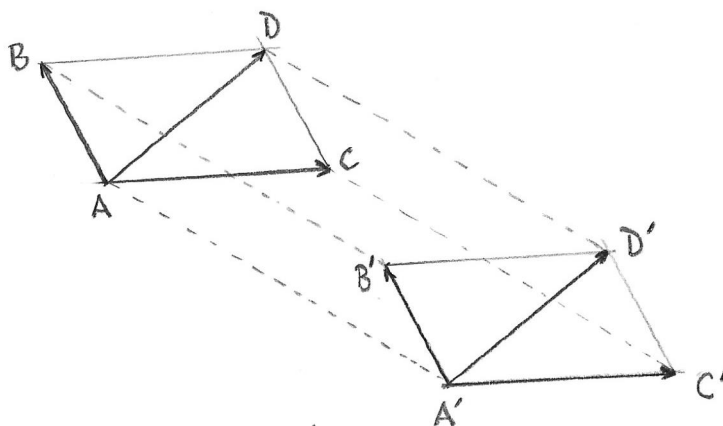
Θα διατυπώσουμε αυτή την παρατήρηση στο επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 1.4 Η παράλληλη μεταφορά είναι συμβατή με τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων, και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό. Πιο συγκεκριμένα, εάν $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$ και $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{A'C'}$, τότε

$$\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'} \sim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

και για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$a \overrightarrow{A'B'} \sim a \overrightarrow{AB}.$$



Σχήμα 1.11: Πρόσθεση και παράλληλη μεταφορά

Απόδειξη. Για την πρόσθεση, (Σχήμα 1.11), αρκεί να δείξουμε ότι εάν $ABB'A'$, $ACC'A'$, $ABDC$ και $A'B'D'C'$ είναι παραλληλόγραμμα, τότε $ADD'A'$ είναι επίσης παραλληλόγραμμο. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.1, πρώτα στα παραλληλόγραμμα $ABDC$ και $ACC'A'$, για να δείξουμε ότι $BDC'A'$ είναι παραλληλόγραμμο, κατόπιν στα $BDC'A'$ και $A'B'D'C'$ για να δείξουμε ότι $BDD'B'$ είναι παραλληλόγραμμο, και τέλος στα $BDD'B'$ και $ABB'A'$ για να δείξουμε ότι $ADD'A'$ είναι παραλληλόγραμμο. Η απόδειξη για τον πολλαπλασιασμό είναι ανάλογη.

□

Αυτή η ιδιότητα θα μας επιτρέψει να επεκτείνουμε τον ορισμό των πράξεων και μεταξύ διανυσμάτων με διαφορετικό σημείο εφαρμογής, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Δραστηριότητα 1.10 Σημειώστε τρία σημεία στο επίπεδο, A, B, C , και σχεδιάστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BC}$. Σχεδιάστε το διάνυσμα $\overrightarrow{AC}$ που προκύπτει με παράλληλη μεταφορά του διανύσματος $\overrightarrow{BC}$ στο A . Εφαρμόστε τον κανόνα του παραλληλογράμμου για να βρείτε το άθροισμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Τι παρατηρείτε; Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη διαδικασία για να ορίσουμε το άθροισμα δύο διανυσμάτων ακόμα και όταν δεν έχουν την ίδια αρχή;

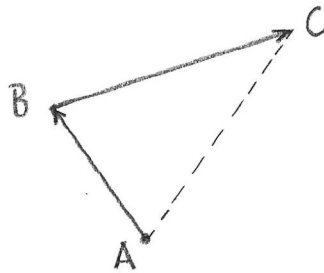
Διάλεξη 2

Ελεύθερα διανύσματα

Στηριζόμενοι στην αρχή ότι “προσθέτουμε ομοειδή αντικείμενα”, μέχρι τώρα περιοριστήκαμε να ορίσουμε τις πράξεις σε διανύσματα με ένα κοινό σημείο εφαρμογής, το O . Αν όμως στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού προβληματίζει η πρόσθεση 2 μήλα + 3 πορτοκάλια, αργότερα το πρόβλημα ξεπεράστηκε, βάζοντας “μήλα” και “πορτοκάλια” στην κοινή κατηγορία “φρούτα”. Κάτι ανάλογο θα κάνουμε τώρα, ώστε να μπορούμε να προσθέτουμε διανύσματα με διαφορετικά σημεία εφαρμογής.

Ας δούμε πρώτα κάποια φυσικά προβλήματα στα οποία χρειάζεται να συνθέσουμε διανύσματα με διαφορετικά σημεία εφαρμογής.

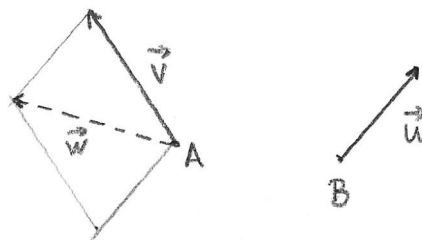
Παράδειγμα 1.1 Μία φυσική ερμηνεία των διανυσμάτων είναι η μετατόπιση, Σχήμα 1.12.



Σχήμα 1.12: Σύνθεση μετατοπίσεων.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ περιγράφει τη μετατόπιση ενός αντικείμενου από το σημείο A στο σημείο B . Εάν κατόπιν το αντικείμενο μετατοπισθεί από το B στο C , θα θέλαμε να μπορούμε να εκφράσουμε τη συνολική μετατόπιση ως σύνθεση των μετατοπίσεων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BC}$, δηλαδή ως το “άθροισμα” $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, αλλά τα δύο διανύσματα δεν έχουν κοινό σημείο εφαρμογής.

Παράδειγμα 1.2 Μία άλλη φυσική ερμηνεία των διανυσμάτων είναι η ταχύτητα. Το διά-



Σχήμα 1.13: Σχετική ταχύτητα του A ως προς το B .

νυσμα $\vec{v}$ με σημείο εφαρμογής A παριστάνει την ταχύτητα ενός αντικειμένου τη στιγμή που βρίσκεται στο σημείο A . Εάν ένα άλλο αντικείμενο την ίδια στιγμή βρίσκεται στο σημείο B και κινείται με ταχύτητα $\vec{u}$, η σχετική ταχύτητα του A ως προς το B φυσιολογικά δίδεται από τη διαφορά των ταχυτήτων, $\vec{v} - \vec{u}$, Σχήμα 1.13. Πάλι, χρειάζεται να συνθέσουμε διανύσματα με διαφορετικά σημεία εφαρμογής.

Παράδειγμα 1.3 Μία τρίτη φυσική έννοια που παριστάνεται με διανύσματα είναι η δύναμη. Η δύναμη $\vec{F}_1$ δρά σε ένα στερεό σώμα στο σημείο A , ενώ η δύναμη $\vec{F}_2$ δρά στο σημείο B . Ποιό θα είναι το συνολικό αποτέλεσμα, η συνισταμένη δύναμη; Θα θέλαμε αυτό να εκφράζεται με κάποιο τρόπο από το άθροισμα των δύο διανυσμάτων $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Σε αυτές τις περιπτώσεις θέλουμε να εξετάσουμε διανύσματα χωρίς να λαμβάνουμε υπ' όψιν το ακριβές σημείο στο οποίο εφαρμόζονται. Για να πετύχουμε αυτό ορίζουμε μία καινούργια έννοια, το ελεύθερο διάνυσμα.

Ορισμός 1.7. Το **ελεύθερο διάνυσμα** που αντιστοιχεί στο εφαρμοστό γεωμετρικό διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που είναι ισοδύναμα με το $\vec{u}$, δηλαδή που προκύπτουν από το $\vec{u}$ με παράλληλη μεταφορά.

Προς το παρόν θα συμβολίζουμε το ελεύθερο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\vec{u}$ με $[\vec{u}]$, δηλαδή

$$[\vec{u}] = \{\vec{z} \text{ διάνυσμα στο επίπεδο, τέτοιο ώστε } \vec{z} \sim \vec{u}\}.$$

Έτσι, το ελεύθερο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\vec{u}$ είναι **ίσο** με το ελεύθερο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\vec{v}$ εάν και μόνον εάν το $\vec{u}$ προκύπτει από το $\vec{v}$ με παράλληλη μεταφορά,

$$[\vec{u}] = [\vec{v}] \quad \text{εάν και μόνον εάν} \quad \vec{u} \sim \vec{v}.$$

Από το Λήμμα 1.2 γνωρίζουμε ότι εάν δύο διανύσματα είναι ισοδύναμα με ένα τρίτο, τότε είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα, και συνεπώς εάν $[\vec{u}] = [\vec{v}]$ και $[\vec{v}] = [\vec{w}]$, τότε $[\vec{u}] = [\vec{w}]$, όπως θα περιμέναμε.

Δραστηριότητα 1.11 Σχεδιάστε ένα παραλληλόγραμμο $ABCD$. Ποιές από τις ακόλουθες σχέσεις είναι αληθείς για εφαρμοστά διανύσματα; Είναι η ισότητα (β') αληθής για ελεύθερα διανύσματα;

$$\alpha'. \quad \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}, \quad \beta'. \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \quad \gamma'. \quad \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}.$$

Πράξεις με ελεύθερα διανύσματα

Για να προσθέσουμε ελεύθερα διανύσματα χρησιμοποιούμε **αντιπροσώπους** των συνόλων, με κοινό σημείο εφαρμογής. Αυτή η ιδέα δεν είναι τόσο παράξενη όσο ίσως φαίνεται αρχικά. Το ίδιο πράγμα κάνουμε όταν προσθέτουμε κλάσματα: Ένας ρητός αριθμός αντιστοιχεί σε ένα σύνολο κλασμάτων που τον παριστάνουν, για παράδειγμα τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{342}{684}$ όλα παριστάνουν τον ίδιο ρητό αριθμό. Για να προσθέσουμε $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$ χρησιμοποιούμε αντιπροσώπους

που ταιριάζουν καλύτερα, σε αυτή την περίπτωση αυτούς που έχουν τον ίδιο παρονομαστή, και γράφουμε $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.

Ανάλογα, για να προσθέσουμε τα ελεύθερα διανύσματα $[\vec{u}]$ και $[\vec{v}]$ χρησιμοποιούμε αντιπροσώπους που ταιριάζουν καλύτερα, δηλαδή που έχουν κοινό σημείο εφαρμογής.

Θεωρούμε τα ελεύθερα διανύσματα $[\vec{u}]$ και $[\vec{v}]$. Στο σημείο O έχουμε $\overrightarrow{OA} \sim \vec{u}$ και $\overrightarrow{OB} \sim \vec{v}$. Προσθέτουμε τα εφαρμοστά διανύσματα, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$. Ορίζουμε το **άθροισμα των ελεύθερων διανυσμάτων** $[\vec{u}]$ και $[\vec{v}]$ να είναι το ελεύθερο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\overrightarrow{OC}$,

$$\begin{aligned} [\vec{u}] + [\vec{v}] &= [\overrightarrow{OC}] \\ &= [\vec{w}]. \end{aligned}$$

Ορίζουμε το πολλαπλάσιο του ελεύθερου διανύσματος $[\vec{u}]$ με τον πραγματικό αριθμό a να είναι το ελεύθερο διάνυσμα $[a\overrightarrow{OA}]$,

$$\begin{aligned} a[\vec{u}] &= [a\overrightarrow{OA}] \\ &= [a\vec{u}]. \end{aligned}$$

Όταν χρησιμοποιούμε αντιπροσώπους για να ορίσουμε μία πράξη πρέπει να είμαστε λίγο προσεκτικοί. Ας δούμε ξανά το άθροισμα των ρητών αριθμών $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Θα μπορούσαμε αντί για τους αντιπροσώπους $\frac{3}{6}$ και $\frac{2}{6}$ να χρησιμοποιήσουμε τους αντιπροσώπους $\frac{342}{684}$ και $\frac{228}{684}$, και να υπολογίσουμε $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{342}{684} + \frac{228}{684} = \frac{570}{684}$. Για να είναι λογικό να ορίσουμε την πρόσθεση ρητών αριθμών με αυτό τον τρόπο πρέπει το τελικό αποτέλεσμα να μην εξαρτάται από τους αντιπροσώπους που χρησιμοποιώ για να υπολογίσω το συγκεκριμένο κλάσμα, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει $\frac{5}{6} = \frac{570}{684}$. Αυτό μπορούμε εύκολα να το ελέγξουμε. Και γενικότερα, εάν τα κλάσματα $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ και $\frac{s}{q} = \frac{s'}{q'}$, τότε ισχύει $\frac{p+s}{q} = \frac{p'+s'}{q'}$. Λέμε ότι η πρόσθεση ρητών αριθμών είναι **καλά ορισμένη** μέσω της πρόσθεσης κλασμάτων με κοινό παρονομαστή.

Σε πολλές περιπτώσεις στα Μαθηματικά χρησιμοποιούμε αυτή τη μέθοδο: ορίζουμε νέα μαθηματικά αντικείμενα ως σύνολα “ισοδύναμων” αντικειμένων, και ορίζουμε τις πράξεις μεταξύ των νέων αντικειμένων χρησιμοποιώντας αντιπροσώπους από αυτά τα σύνολα. Σε κάθε τέτοια περίπτωση πρέπει να ελέγξουμε ότι η πράξη που προσπαθούμε να ορίσουμε είναι **καλά ορισμένη**, δηλαδή το τελικό αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τους αντιπροσώπους που επιλέγουμε. Περισσότερα για αυτό το ζήτημα θα δείτε στο μάθημα “Θεμέλια των Μαθηματικών”.

Και στην περίπτωση των πράξεων με ελεύθερα διανύσματα, πρέπει να ελέγξουμε ότι είναι **καλά ορισμένες**, δηλαδή ότι το ελεύθερο διάνυσμα που παίρνουμε ως αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τους συγκεκριμένους αντιπροσώπους που επιλέξαμε, $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$. Αυτό ισχύει, και η επαλήθευση βασίζεται στις ιδιότητες της παράλληλης μεταφοράς. Ας δούμε την περίπτωση του αθροίσματος.

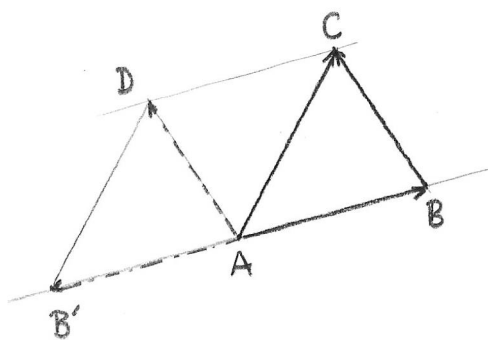
Εάν επιλέξουμε αντιπροσώπους με ένα άλλο σημείο εφαρμογής, $\overrightarrow{OA'}$ και $\overrightarrow{OB'}$, τότε $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{OA'}$ και $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{OB'}$, και από το Λήμμα 1.4, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$. Άρα το ελεύθερο διάνυσμα $[\vec{u}] + [\vec{v}]$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου εφαρμογής. Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι ο πολλαπλασιασμός με αριθμό είναι καλά ορισμένος.

Στη συνέχεια θα θεωρούμε όλα τα διανύσματα που χρησιμοποιούμε ως ελεύθερα διανύσματα, εκτός εάν αναφέρεται ρητά το αντίθετο. Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό, και να ακολουθήσουμε τη συνήθη μαθηματική πρακτική, θα παραλείπουμε τις αγκύλες [], και θα συμβολίζουμε με $\vec{u}$ ή $\vec{AB}$ το ελεύθερο διάνυσμα ή οποιοδήποτε γεωμετρικό διάνυσμα ισοδύναμο με το $\vec{u}$ ή το $\vec{AB}$.

Παράδειγμα 1.4 Σχεδιάζουμε τρία σημεία A, B, C και τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}$, Σχήμα 1.14. Η διαφορά $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{AB'}$ είναι το διάνυσμα $\vec{AD}$. Αλλά αφού $CDB'A$ είναι παραλληλόγραμμο και $B'ABA$ είναι (εκφυλισμένο) παραλληλόγραμμο, από την Πρόταση 1.1, $CDAB$ είναι επίσης παραλληλόγραμμο. Άρα τα διανύσματα $\vec{BC}$ και $\vec{AD}$ είναι ισοδύναμα. Συμπεραίνουμε ότι, ως ελεύθερα διανύσματα,

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}.$$

Αυτή η σχέση μας επιτρέπει να εκφράζουμε οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{u}$ ως διαφορά δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή, και πέρατα το πέρας και την αρχή του $\vec{u}$ αντίστοιχα.



Σχήμα 1.14: Το διάνυσμα $\vec{BC}$ ως διαφορά των $\vec{AC}$ και $\vec{AB}$.

Δραστηριότητα 1.12 Σημειώστε τα σημεία A, B, C, D στις κορυφές ενός τετραγώνου, και το O στο κέντρο του τετραγώνου. Εάν $\vec{u} = \vec{OA}$ και $\vec{w} = \vec{OB}$, εκφράστε τα $\vec{OC}, \vec{OD}, \vec{AB}, \vec{BC}$ και $\vec{BD}$ ως αθροίσματα ή διαφορές των $\vec{u}$ και $\vec{w}$.

Γραμμικοί συνδυασμοί, γραμμική ανεξαρτησία

Είναι ενδιαφέρον να δούμε ποια διανύσματα μπορούμε να πάρουμε όταν εφαρμόσουμε τις πράξεις που έχουμε ορίσει σε ένα δεδομένο σύνολο διανυσμάτων.

Εάν έχουμε ένα διάνυσμα, εφαρμόζοντας τον πολλαπλασιασμό με αριθμό παίρνουμε υποχρεωτικά διανύσματα συγγραμμικά με το δοθέν. Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε όλα τα συγγραμμικά διανύσματα.

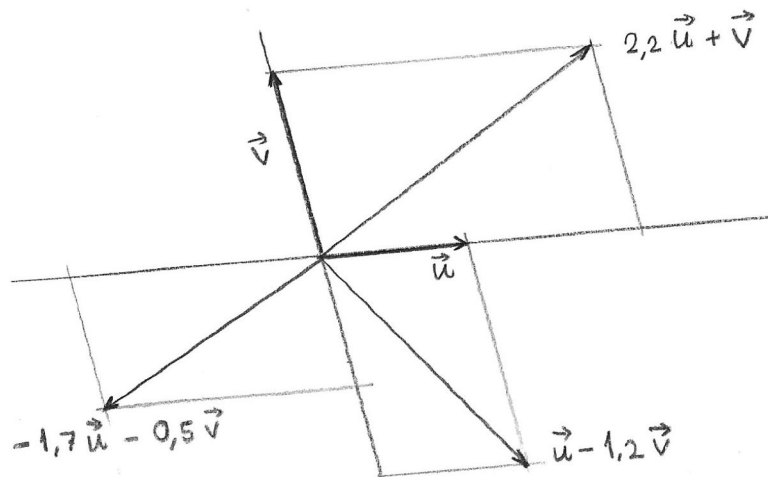
Πρόταση 1.5 Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ είναι συγγραμμικά διανύσματα, και $\vec{u}$ δεν είναι μηδενικό διάνυσμα, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\vec{v} = a\vec{u}.$$

Απόδειξη. Αφού τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι συγγραμμικά, τα σημεία O, A, B βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και αφού $\vec{u}$ δεν είναι μηδενικό, $|OA| \neq 0$. Έστω a ο λόγος των μηκών των $\vec{v}$ και $\vec{u}$, $a = \frac{|OB|}{|OA|}$. Τότε, εάν $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι ομόρροπα, $\vec{v} = a\vec{u}$, ενώ εάν $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα, $\vec{v} = -a\vec{u}$. □

Εάν έχουμε δύο συγγραμμικά διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$, από την Πρόταση 1.5, $\vec{v} = a\vec{u}$ και $\vec{u} + \vec{v} = (1 + a)\vec{u}$. Συνεπώς όλα τα διανύσματα που παίρνουμε εφαρμόζοντας τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό είναι επίσης συγγραμμικά.

Εάν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ τα οποία δεν είναι συγγραμμικά, τότε έχουμε περισσότερες δυνατότητες, (Σχήμα 1.15). Θα δείξουμε ότι μπορούμε να πάρουμε κάθε διάνυσμα του επιπέδου εφαρμόζοντας τις πράξεις στα $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

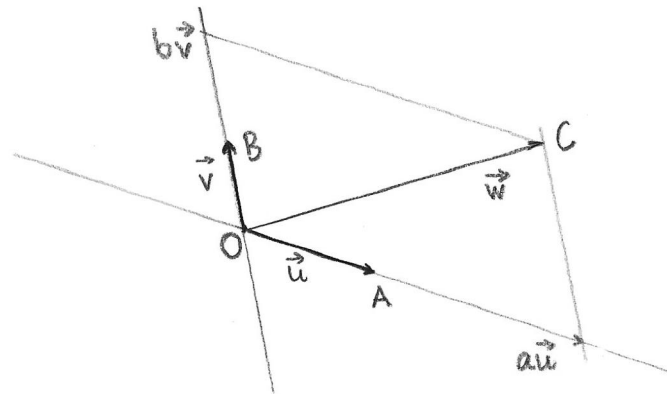


Σχήμα 1.15: Γραμμικοί συνδυασμοί διανυσμάτων.

Πρόταση 1.6 Εάν τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ δεν είναι συγγραμμικά, τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{w}$ του επιπέδου, με αρχή στο O , $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Απόδειξη. Αφού τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ δεν είναι συγγραμμικά, τα σημεία O, A, B δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Από το άκρο C του $\vec{w}$, φέρουμε παράλληλο προς την OB , (Σχήμα 1.16), και αυτή τέμνει την ευθεία OA στο A' . Το διάνυσμα $\overrightarrow{OA'}$ είναι συγγραμμικό



Σχήμα 1.16: Ανάλυση διανύσματος σε γραμμικό συνδυασμό.

με το $\vec{u}$, και από την Πρόταση 1.5, $\overrightarrow{OA'} = a\vec{u}$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Παρόμοια, φέρουμε από το C παράλληλο προς την OA , η οποία τέμνει την OB στο B' , και $\overrightarrow{OB'} = b\vec{v}$ για κάποιο $b \in \mathbb{R}$. Από την κατασκευή, το τετράπλευρο $OA'CB'$ είναι παραλληλόγραμμο, και συνεπώς

$$\begin{aligned}\vec{w} = \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} \\ &= a\vec{u} + b\vec{v}.\end{aligned}$$

□

Ορισμός 1.8. Εάν $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ είναι διανύσματα, με αρχή στο O , ονομάζουμε **γραμμικό συνδυασμό** των $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ κάθε έκφραση της μορφής

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_n\vec{u}_n$$

όπου $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Ένα διάνυσμα εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ εάν μπορούμε να το κατασκευάσουμε εφαρμόζοντας τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό στα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$. Στην Πρόταση 1.6 δείξαμε ότι κάθε διάνυσμα του επιπέδου εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός δύο δοθέντων μη συγγραμμικών διανυσμάτων.

Όταν εξετάζουμε μια συλλογή διανυσμάτων, συχνά μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε εάν κάποιο από τα διανύσματα μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Εάν συμβαίνει αυτό, θεωρούμε ότι η συλλογή περιέχει, με κάποια έννοια, περιττά στοιχεία. Αυτή την έννοια αποτυπώνει ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 1.9. Λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, είναι **γραμμικά εξαρτημένα** εάν κάποιο από αυτά μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, δηλαδή εάν υπάρχει κάποιο i , $1 \leq i \leq n$, και πραγματικοί αριθμοί $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ τέτοιοι ώστε

$$\vec{u}_i = a_1\vec{u}_1 + \dots + a_{i-1}\vec{u}_{i-1} + a_{i+1}\vec{u}_{i+1} + \dots + a_n\vec{u}_n$$

Εάν τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα, λέμε ότι είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**.

Οι παραπάνω ορισμοί έχουν νόημα μόνον όταν έχουμε περισσότερα από ένα διανύσματα στη συλλογή. Συμπληρώνουμε τον ορισμό για την περίπτωση ενός διανύσματος, λέγοντας ότι το διάνυσμα $\vec{u}_1$ είναι γραμμικά εξαρτημένο εάν είναι μηδενικό, και γραμμικά ανεξάρτητο εάν δεν είναι μηδενικό.

Οι Προτάσεις 1.5 και 1.6 δείχνουν ότι κάθε συλλογή που περιέχει δύο συγγραμμικά διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένη, και κάθε συλλογή που περιέχει περισσότερα από δύο διανύσματα στο επίπεδο είναι γραμμικά εξαρτημένη.

Παρατηρούμε ότι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα στο επίπεδο είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και κάθε άλλο διάνυσμα του επιπέδου μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των δύο διανυσμάτων. Ένα ζεύγος διανυσμάτων με αυτές τις ιδιότητες ονομάζεται **βάση** των διανυσμάτων του επιπέδου.

Δραστηριότητα 1.13 Σημειώστε τα σημεία A, B, C, D, E, F στις κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου, και το O στο κέντρο του εξαγώνου. Εκφράστε τα $\vec{OC}, \vec{OD}, \vec{OE}, \vec{OF}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$.

Άξονας, προσημασμένο μέτρο διανύσματος

Ορισμός 1.10. **Άξονα** ονομάζουμε μία ευθεία ε στην οποία έχουμε επιλέξει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{v}$ με φορέα ε . Η επιλογή του $\vec{v}$ καθορίζει έναν **προσανατολισμό** πάνω στην ε και στα διανύσματα που έχουν φορέα ε : τα διανύσματα που είναι ομόρροπα με το $\vec{v}$ έχουν θετικό προσανατολισμό, ενώ τα διανύσματα που είναι αντίρροπα προς το $\vec{v}$ έχουν αρνητικό προσανατολισμό.

Εάν $\vec{w}$ είναι διάνυσμα συγγραμμικό με το $\vec{v}$, ονομάζουμε **προσημασμένο μέτρο** (ή **αλγεβρική τιμή**) του $\vec{w}$ ως προς τον άξονα $(\varepsilon, \vec{v})$ τον πραγματικό αριθμό $a \in \mathbb{R}$ ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση

$$\vec{w} = \frac{a}{|\vec{v}|} \vec{v}.$$

Παρατηρούμε ότι $|a| = |\vec{w}|$, και εάν $\vec{w}$ δεν είναι μηδενικό, τότε $a > 0$ εάν $\vec{w}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{v}$, ενώ $a < 0$ εάν $\vec{w}$ είναι αντίρροπο προς το $\vec{v}$. Το προσημασμένο μέτρο του διανύσματος $\vec{OB}$ συμβολίζουμε (OB) . Δεν θα χρησιμοποιούμε συχνά το συμβολισμό $(\vec{u})$ για το προσημασμένο μέτρο του $\vec{u}$, καθώς αυτός ο συμβολισμός μπορεί να παρερμηνευτεί.

Λήμμα 1.7 (Κανόνας του Chasles) Εάν A, B, C είναι συγγραμμικά σημεία πάνω σε άξονα $(\varepsilon, \vec{v})$, τότε

$$(AB) + (BC) = (AC).$$

Δραστηριότητα 1.14 Σημειώστε τρία σημεία A, C, B πάνω σε μία ευθεία ε , έτσι ώστε το C να βρίσκεται μεταξύ του A και του B . Επιλέξτε ένα διάνυσμα $\vec{v}$ με φορά την ε , και χρησιμοποιήστε το για να ορίσετε προσανατολισμό. Μετρήστε το μήκος των διανυσμάτων, υπολογίστε τα προσημασμένα μέτρα $(AB), (BC), (AC)$ και ελέγξτε ότι $(AB) + (BC) = (AC)$.

Εάν χρησιμοποιήσετε τον αντίθετο προσανατολισμό, όλα τα μέτρα αλλάζουν πρόσημο, άρα η ισότητα διατηρείται.

Απλός λόγος τριών σημείων

Ο απλός λόγος είναι ένας πραγματικός αριθμός $\mu \neq -1$, ο οποίος περιγράφει τη σχετική θέση τριών διαφορετικών σημείων πάνω σε μία ευθεία.

Ορισμός 1.11. Θεωρούμε τρία σημεία P_1, P_2, P πάνω σε μία ευθεία. Τα διανύσματα $\overrightarrow{P_1P}$ και $\overrightarrow{PP_2}$ είναι συγγραμμικά, και εάν $P \neq P_2$ υπάρχει ένας αριθμός μ τέτοιος ώστε

$$\overrightarrow{P_1P} = \mu \overrightarrow{PP_2}.$$

Ο αριθμός μ ονομάζεται **απλός λόγος** των τριών σημείων, και συμβολίζεται $(P_1 P_2 P)$.

Παρατηρούμε ότι $(P_1 P_2 P) = \frac{(P_1P)}{(PP_2)}$, και ότι η αλλαγή του προσανατολισμού της ευθείας δεν επηρεάζει τον απλό λόγο. Εάν θεωρήσουμε τα P_1, P_2 σταθερά, και το P να κινείται πάνω στην ευθεία, η τιμή του απλού λόγου μεταβάλλεται όπως στο Σχήμα 1.17.



Σχήμα 1.17: Η τιμή του απλού λόγου καθώς το σημείο P κινείται πάνω στην ευθεία P_1P_2 .

Δραστηριότητα 1.15 Για τα σημεία A, B, C της Δραστηριότητας 1.14 υπολογίστε τους απλούς λόγους $(ABC), (BCA)$ και (CAB) .

Δραστηριότητα 1.16 Σημειώστε δύο σημεία P_1 και P_2 πάνω σε μία ευθεία ε . Βρείτε σημεία R, S, T πάνω στην ε τέτοια ώστε $(P_1 P_2 R) = 2$, $(P_1 P_2 S) = -\frac{1}{4}$ και $(P_2 P_1 T) = -\frac{1}{4}$.

Ασκήσεις 1

Άσκηση 1.1 Έστω $ABCD$ παραλληλόγραμμο, E σημείο στην πλευρά AB και F σημείο στην πλευρά CD τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$. Έστω, επίσης σημείο G στην πλευρά AD και H σημείο στην πλευρά BC , τέτοια ώστε $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{HC}$. Αποδείξτε ότι το $EGFH$ είναι παραλληλόγραμμο.

Υπόδειξη: Μπορείτε να προσεγγίσετε αυτή την άσκηση με πολλούς τρόπους. Προσπαθήστε αρχικά να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του παραλληλογράμμου που δώσαμε στο μάθημα.

Άσκηση 1.2 Σχεδιάστε τρία σημεία A, B, C , που δεν βρίσκονται όλα στην ίδια ευθεία, τέτοια ώστε $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Άσκηση 1.3 Αποδείξτε με χρήση διανυσμάτων ότι η ευθεία που ενώνει τα μέσα M, N των πλευρών AB και AC ενός τριγώνου ABC είναι παράλληλη προς την πλευρά BC και έχει μήκος το μισό της BC .

Άσκηση 1.4 Σχεδιάστε το τραπέζιο $ABCD$ με βάσεις AD και BC . Έστω M, N τα μέσα των πλαγίων πλευρών AB και CD . Αποδείξτε ότι

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) .$$

Άσκηση 1.5 Σημειώστε τρία σημεία O, A, B που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο X του επιπέδου το διάνυσμα $\overrightarrow{OX}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός $\overrightarrow{OX} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$. Δείξτε ότι το σημείο X βρίσκεται στην ευθεία που περνάει από τα A και B εάν και μόνον εάν $a + b = 1$.

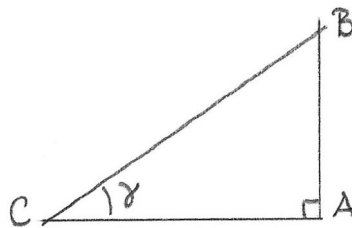
Πού νομίζετε ότι βρίσκεται το X εάν $a + b = 3$;

Διάλεξη 3

Προβολή διανύσματος, εσωτερικό γινόμενο

Στην Αναλυτική Γεωμετρία χρησιμοποιούμε το εσωτερικό γινόμενο για να προσδιορίσουμε τη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων. Από το σχολείο γνωρίζουμε τον ορισμό του ημιτόνου και του συνημιτόνου γωνίας στο πλαίσιο ενός ορθογωνίου τριγώνου, Σχήμα 1.18.

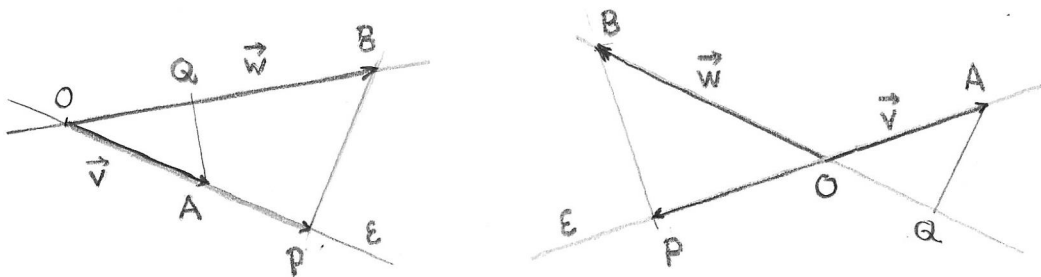
$$\cos \gamma = \frac{|CA|}{|CB|}, \quad \sin \gamma = \frac{|AB|}{|CB|}.$$



Σχήμα 1.18: Ημίτονο και συνημίτονο γωνίας.

Το πρώτο βήμα για να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο γεωμετρικών διανυσμάτων είναι να προσδιορίσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Αυτό γίνεται μέσω της “ορθογωνίας προβολής”.

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα με κοινή αρχή στο O , $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$. Έστω ε ο φορέας του $\vec{v}$. Από το πέρας του $\vec{w}$ φέρουμε κάθετο προς την ε , και σημειώνουμε P το σημείο όπου αυτή τέμνει την ε , έτσι ώστε η OA και η BP να τέμνονται σε ορθή γωνία, Σχήμα 1.19. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ είναι η προβολή του διανύσματος $\vec{w}$ στο διάνυσμα $\vec{v}$.



Σχήμα 1.19: Ορθογώνια προβολή διανύσματος σε άξονα.

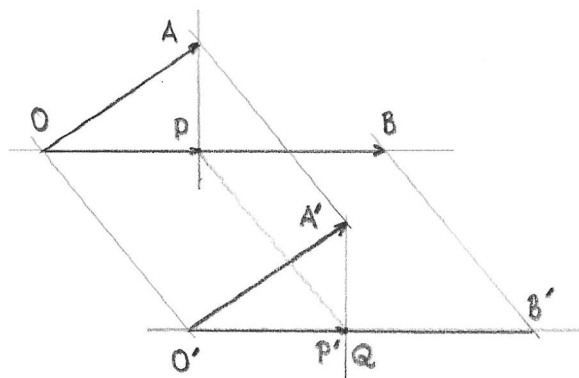
Ανάλογα ορίζουμε την προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{w}$. Από το πέρας του $\vec{v}$ φέρουμε κάθετο προς τον φορέα του $\vec{w}$ και σημειώνουμε Q το σημείο τομής. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OQ}$ είναι η προβολή του διανύσματος $\vec{v}$ στο διάνυσμα $\vec{w}$.

Ορισμός 1.12. Θεωρούμε μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ και διάνυσμα $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$. Ονομάζουμε (ορθογώνια) **προβολή του $\vec{w}$ στο $\vec{v}$** , και συμβολίζουμε $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$, το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$, όπου P είναι το σημείο τομής της καθέτου από το B προς την OA .

Σημειώνουμε ότι ορισμένοι συγγραφείς ονομάζουν προβολή το προσημασμένο μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{OP}$ ως προς τον άξονα $(\varepsilon, \vec{v})$, και όχι το ίδιο το διάνυσμα. Από τα συμφραζόμενα είναι συνήθως σαφές ποια σύμβαση χρησιμοποιείται.

Παρατηρούμε ότι εάν τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε το σημείο P συμπίπτει με το O και η ορθογώνια προβολή του $\vec{w}$ στο $\vec{v}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Για να εφαρμόσουμε αυτό τον ορισμό σε ελεύθερα διανύσματα, αρκεί να δείξουμε ότι η κατασκευή της προβολής είναι συμβατή με την παράλληλη μεταφορά: εάν $\overrightarrow{O'A'}$ και $\overrightarrow{O'B'}$ προκύπτουν με παράλληλη μεταφορά του $\overrightarrow{OA}$ και του $\overrightarrow{OB}$ στο O' , και $\overrightarrow{O'Q}$ είναι η προβολή του $\overrightarrow{O'A'}$ στο $\overrightarrow{O'B'}$, Σχήμα 1.20, θέλουμε να δείξουμε ότι $\overrightarrow{O'Q}$ συμπίπτει με την παράλληλη μεταφορά $\overrightarrow{OP}$ του $\overrightarrow{OB}$. Αλλά οι κάθετες ευθείες OP και $A'P'$ μεταφέρονται σε κάθετες ευθείες $O'P'$ και $A'P'$, και συνεπώς $P' = Q$. Άρα το ελεύθερο διάνυσμα $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ δεν εξαρτάται από τους αντιπροσώπους των $\vec{v}$ και $\vec{w}$ που χρησιμοποιούμε στην κατασκευή. Καταλήγουμε ότι η προβολή είναι καλά ορισμένη σε ελεύθερα διανύσματα.



Σχήμα 1.20: Ορθογώνια προβολή και παράλληλη μεταφορά.

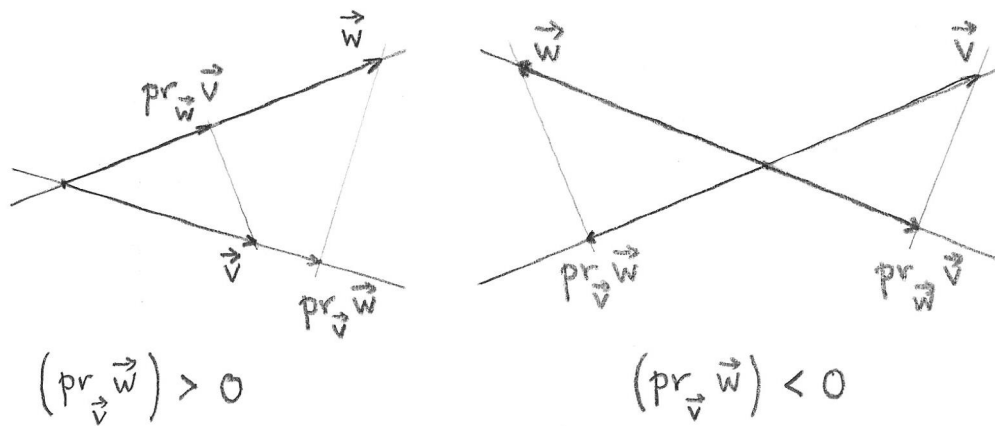
Δραστηριότητα 1.17 Σημειώστε τα σημεία A, B, C στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου, και θεωρήστε τα διανύσματα $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ και $\vec{u} = \overrightarrow{CB}$. Κατασκευάστε την προβολή $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$. Μεταφέρατε παράλληλα το $\vec{u}$ στο A και κατασκευάστε την προβολή $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{u}$. Ποιά είναι η σχέση των δύο προβολών; (Δεν είναι ίσες!) Βρείτε τα προσημασμένα μέτρα των δύο προβολών, εάν το μήκος της πλευράς του τριγώνου είναι 1.

Παρατηρούμε ότι εάν τα $\vec{v}, \vec{w}$ είναι και τα δύο μη μηδενικά, Σχήμα 1.21

α'. το διάνυσμα $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{v}$, και μπορεί να είναι ομόρροπο ή αντίρροπο με το $\vec{v}$,

- β'. το διάνυσμα $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{w}$, και μπορεί να είναι ομόρροπο ή αντίρροπο με το $\vec{w}$,
- γ'. το διάνυσμα $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{v}$ ακριβώς όταν το διάνυσμα $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{w}$,
- δ'. το διάνυσμα $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ είναι αντίρροπο προς το $\vec{v}$ ακριβώς όταν το διάνυσμα $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$ είναι αντίρροπο προς το $\vec{w}$.

Πράγματι η προβολή $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ είναι ομόρροπη με το $\vec{v}$ μόνον όταν το $\vec{w}$ και το $\vec{v}$ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την κάθετο από το O στο φορέα του $\vec{v}$, Σχήμα 1.21. Όμως σε αυτήν την περίπτωση τα $\vec{w}$ και $\vec{v}$ βρίσκονται επίσης στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την κάθετο από το O στο φορέα του $\vec{w}$, και συνεπώς $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$ είναι ομόρροπη με το $\vec{w}$.



Σχήμα 1.21: Προσημασμένο μήκος ορθογώνιας προβολής.

Τώρα θέλουμε να μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ των προβολών $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ και $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$. Αυτές είναι εν γένει διαφορετικές. Παρατηρούμε όμως ότι τα τρίγωνα OBP και OAQ στο Σχήμα 1.19 είναι όμοια, και συνεπώς $|OA||OP| = |OB||OQ|$, δηλαδή

$$|\vec{v}||\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}| = |\vec{w}||\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}|.$$

Εάν θεωρήσουμε αντί των μέτρων $|\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}|$ και $|\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}|$ τα προσημασμένα μέτρα $(\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w})$ και $(\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v})$ ως προς τον προσανατολισμό που ορίζουν στον φορέα τους τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ έχουμε πάλι ισότητα: το πρόσημο είναι το ίδιο, αφού τα $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$ και $\vec{w}$ είναι αντίρροπα ακριβώς όταν και τα $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα. Συμπεραίνουμε ότι η προβολή του $\vec{w}$ στο $\vec{v}$ και η προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{w}$ ικανοποιούν τη σχέση

$$|\vec{v}|(\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}) = |\vec{w}|(\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}). \quad (1.1)$$

Αυτός ο αριθμός, που δεν εξαρτάται από το εάν προβάλουμε το $\vec{w}$ στο $\vec{v}$ ή το $\vec{v}$ στο $\vec{w}$, είναι το εσωτερικό γινόμενο των γεωμετρικών διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{w}$.

Ορισμός 1.13. Εάν $\vec{v}$ και $\vec{w}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα, ονομάζουμε τον πραγματικό αριθμό $|\vec{v}| (\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w})$ **εσωτερικό γινόμενο** του $\vec{v}$ και του $\vec{w}$, και το συμβολίζουμε

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| (\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}).$$

Εάν ένα από τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{w}$ είναι μηδενικό, ορίζουμε $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

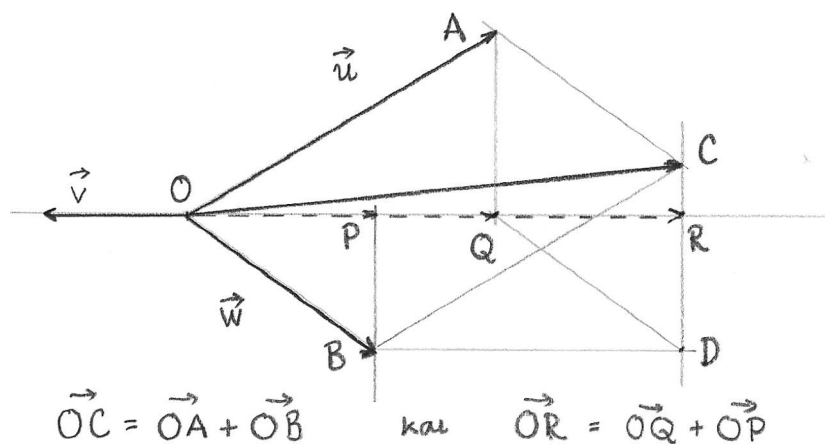
Παρατηρούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι καλά ορισμένο σε ελεύθερα διανύσματα, αφού αυτό ισχύει για το μέτρο και την προβολή.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη σχέση της προβολής και του εσωτερικού γινομένου με τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού με αριθμό.

Λήμμα 1.8 Η προβολή είναι συμβατή με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό. Συγκεκριμένα, εάν $\vec{v}$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα, $\vec{u}$, $\vec{w}$ είναι διανύσματα και $a \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι ισότητες

$$a'. \text{pr}_{\vec{v}}(\vec{u} + \vec{w}) = \text{pr}_{\vec{v}}\vec{u} + \text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$$

$$b'. \text{pr}_{\vec{v}}(a\vec{w}) = a \text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$$



Σχήμα 1.22: Προβολή αθροίσματος.

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο Σχήμα 1.22. Αποδεικνύουμε το α'. Θέτουμε $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{OQ}$, $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w} = \vec{OP}$ και $\text{pr}_{\vec{v}}(\vec{u} + \vec{w}) = \vec{OR}$. Η παράλληλος προς την ε από το B τέμνει την κάθετο προς την ε από το C στο σημείο D . Τα τρίγωνα OAQ και BCD είναι ίσα. Άρα $(OQ) = (BD) = (PR)$. Από τον κανόνα του Chasles $(OR) = (OP) + (PR)$, και συνεπώς $(OR) = (OP) + (OQ)$. Άρα $\vec{OR} = \vec{OQ} + \vec{OP}$.

Το β' αποδεικνύεται ανάλογα.

□

Δραστηριότητα 1.18 Τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{w}$ και $\vec{u}$ της Δραστηριότητας 1.17 ικανοποιούν τη σχέση $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$. Χρησιμοποιήστε αυτή τη σχέση για να υπολογίσετε την προβολή $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{u}$. Βρίσκετε την ίδια σχέση που βρήκατε στη Δραστηριότητα 1.17;

Οι κυριότερες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου συνοψίζονται στην ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 1.9 Εάν $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ είναι διανύσματα και $a \in \mathbb{R}$, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha'. \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u},$$

$$\beta'. (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v}),$$

$$\gamma'. \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w},$$

$$\delta'. \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \text{ και } |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

ϵ' . Εάν τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ δεν είναι μηδενικά, τότε $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ εάν και μόνο εάν τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Απόδειξη. Το (α') είναι συνέπεια της (1.1).

Τα (β') και (γ') προκύπτουν από το Λήμμα 1.8.

Για το (δ'), παρατηρούμε ότι $\text{pr}_{\vec{u}}\vec{u} = \vec{u}$, και πως εάν το $\vec{u}$ δεν είναι μηδενικό, το προσημασμένο μέτρο του $\vec{u}$ ως προς τον άξονα που ορίζει το ίδιο είναι ίσο με το μέτρο του. Άρα

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| (\text{pr}_{\vec{u}}\vec{u}) = |\vec{u}| |\vec{u}| = |\vec{u}|^2 \geq 0.$$

Για το (ε') παρατηρούμε ότι εάν τα διανύσματα είναι κάθετα, τότε η ορθογώνια προβολή είναι το μηδενικό διάνυσμα, και συνεπώς $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Αντίστροφα, εάν τα διανύσματα δεν είναι κάθετα, τότε η κάθετος από το πέρας του $\vec{v}$ τέμνει τον φορέα του $\vec{u}$ σε σημείο διαφορετικό από το O , και συνεπώς η προβολή $\text{pr}_{\vec{u}}\vec{v}$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα. Άρα $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$.

□

Παρατηρούμε ότι για το εσωτερικό γινόμενο δεν ισχύει ο κανόνας της διαγραφής, που ισχύει στον πολλαπλασιασμό αριθμών. Εάν $\vec{u} \neq 0$ και $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\vec{v} = \vec{w}$. Το μόνο συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε είναι ότι $\vec{v} - \vec{w}$ είναι είτε 0 είτε κάθετο προς το $\vec{u}$.

Δραστηριότητα 1.19 Για τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{w}$ και $\vec{u}$ της Δραστηριότητας 1.17 υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{v} \cdot \vec{w}$ και $\vec{u} \cdot \vec{w}$, εάν το μήκος της πλευράς του τριγώνου είναι 1.

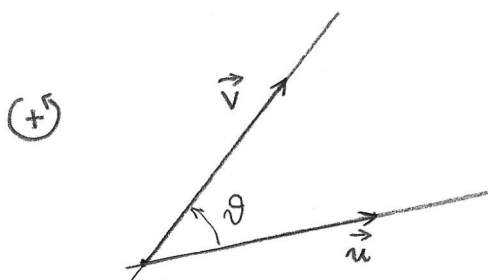
Γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων

Δύο μη μηδενικά διανύσματα με την ίδια αρχή σχηματίζουν μία γωνία. Θα χρησιμοποιήσουμε δύο τρόπους να μετρήσουμε αυτή τη γωνία. Είτε ως την κυρτή γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων, που παίρνει τιμές από 0 έως π , είτε ως προσημασμένη γωνία σε προσανατολισμένο

επίπεδο, που παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Ορισμός 1.14. Η γωνία μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{u} = \vec{OA}$ και $\vec{v} = \vec{OB}$ ορίζεται ως η κυρτή γωνία $\widehat{AOB} = \vartheta$, η οποία παίρνει τιμές στο διάστημα $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Θα τη συμβολίζουμε $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Εάν έχουμε προσανατολίσει το επίπεδο, επιλέγοντας μία φορά περιστροφής ως θετική¹, τότε η γωνία μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.



Σχήμα 1.23: Προσημασμένη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων.

Ορισμός 1.15. Η προσημασμένη γωνία $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ ορίζεται ως η γωνία περιστροφής ϑ , με τιμές στο διάστημα $-\pi < \vartheta \leq \pi$, που διαγράφει το διάνυσμα $\vec{u}$ όταν στρέφεται στο επίπεδο για να συμπίσει με το $\vec{v}$, Σχήμα 1.23.

Παρατηρούμε ότι $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle(\vec{v}, \vec{u})$. Για την προσημασμένη γωνία, εάν $\angle(\vec{u}, \vec{v}) \neq \pi$, τότε $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = -\angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων και ο προσανατολισμός του επιπέδου είναι αμετάβλητα από παράλληλη μεταφορά. Συνεπώς η γωνία και η προσημασμένη γωνία μεταξύ δύο ελεύθερων διανυσμάτων είναι καλά ορισμένες.

Δραστηριότητα 1.20 Σημειώστε τα σημεία A, B, C στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου, και υπολογίστε τις γωνίες $\angle(\vec{AB}, \vec{AC})$, $\angle(\vec{BC}, \vec{AC})$ και $\angle(\vec{BA}, \vec{AC})$. Υπολογίστε επίσης τις προσημασμένες γωνίες $\angle(\vec{AB}, \vec{AC})$, $\angle(\vec{BC}, \vec{AC})$ και $\angle(\vec{BA}, \vec{AC})$.

Το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων υπολογίζεται συναρτήσει της προβολής του ενός στο άλλο,

$$\cos \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\text{pr}_{\vec{v}} \vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{\text{pr}_{\vec{w}} \vec{v}}{|\vec{v}|},$$

ή συναρτήσει του εσωτερικού γινομένου

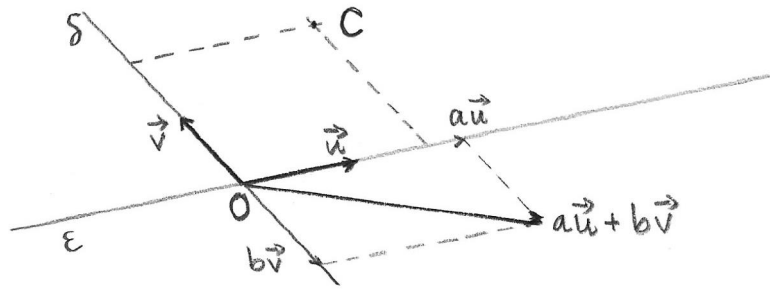
$$\cos \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}.$$

¹ Συνήθως θεωρούμε θετική φορά περιστροφής την αντίθετη προς την κίνηση των δεικτών του ρολογιού.

Σύστημα αναφοράς

Η μέθοδος της Αναλυτικής Γεωμετρίας βασίζεται στην αντιστοίχιση των σημείων του επιπέδου, των διανυσμάτων και άλλων γεωμετρικών αντικειμένων με σύνολα αριθμών, έτσι ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αλγεβρικές μεθόδους στη μελέτη τους. Η αντιστοίχιση αυτή προϋποθέτει την επιλογή ενός *συστήματος αναφοράς*.

Ορισμός 1.16. Επιλέγουμε στο επίπεδο E^2 , ένα σταθερό σημείο O και δύο μη συγγραμμικά διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O , $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ προσδιορίζουν δύο άξονες, $(\epsilon, \vec{u})$ και $(\zeta, \vec{v})$, οι οποίοι τέμνονται στο σημείο O . Το διατεταγμένο ζεύγος αξόνων $(\epsilon, \vec{u})$, $(\delta, \vec{v})$ ονομάζεται **σύστημα αναφοράς** και θα το συμβολίζουμε με $(O, \vec{u}, \vec{v})$, Σχήμα 1.24. Λέμε ότι το σημείο O είναι η *αρχή των αξόνων* του συστήματος αναφοράς.



Σχήμα 1.24: Συντεταγμένες διανύσματος και σημείου σε (μη ορθογώνιο) σύστημα αναφοράς.

Εάν $\vec{w}$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα του επιπέδου E^2 , έχουμε δει ότι μπορούμε να εκφράσουμε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Ορισμός 1.17. Οι αριθμοί του διατεταγμένου ζεύγους (a, b) ονομάζονται **συντεταγμένες του διανύσματος** $\vec{w}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Τα διανύσματα $a\vec{u}$, $b\vec{v}$ ονομάζονται **συνιστώσες** του διανύσματος $\vec{w}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Για κάθε σημείο C του επιπέδου, θεωρούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OC}$, το οποίο εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}$ και $\vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = c_1\vec{u} + c_2\vec{v}$.

Ορισμός 1.18. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OC}$ ονομάζεται **διάνυσμα θέσης** (ή **διανυσματική ακτίνα**) του σημείου C ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Οι συντεταγμένες (c_1, c_2) του διανύσματος $\overrightarrow{OC}$ ονομάζονται **συντεταγμένες του σημείου C** στο σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Δραστηριότητα 1.21 Σημειώστε τα σημεία A, B, C, D, E, F στις κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου, και το O στο κέντρο του εξαγώνου. Θεωρήστε το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$, με $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων C, D, E, F ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Η επιλογή ενός σημείου αναφοράς O στο επίπεδο δίδει μία αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των σημείων του επιπέδου E^2 και του συνόλου $T_O E^2$ των διανυσμάτων με αρχή στο O ,

$$E^2 \longleftrightarrow T_O E^2,$$

που απεικονίζει το σημείο C στο διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OC}$.

Η επιλογή ενός συστήματος αναφοράς στο επίπεδο μας δίδει επιπλέον μία αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου $T_O E^2$ των διανυσμάτων με αρχή στο O και του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$,

$$T_O E^2 \longleftrightarrow \mathbb{R}^2,$$

που απεικονίζει κάθε διάνυσμα με αρχή στο O στις συντεταγμένες του ως προς το σύστημα αναφοράς.

Τέλος, η επιλογή ενός συστήματος αναφοράς στο επίπεδο δίδει μία αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των σημείων του επιπέδου E^2 και του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}^2$,

$$E^2 \longleftrightarrow \mathbb{R}^2,$$

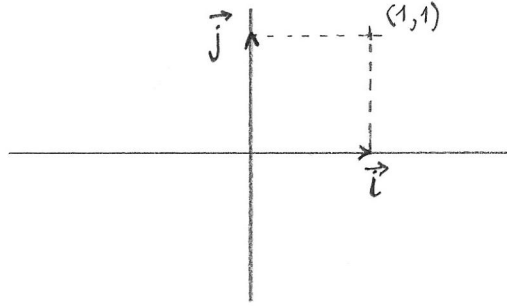
που απεικονίζει κάθε σημείο του επιπέδου στις συντεταγμένες του ως προς το σύστημα αναφοράς.

Δραστηριότητα 1.22 Για το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$ της Δραστηριότητας 1.21, σχεδιάστε τα σημεία με συντεταγμένες $(2, 2)$, $(2, -1)$ και $(-2, 1)$.

Εάν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{w}$ ως προς το $(O, \vec{u}, \vec{v})$ είναι $(-1, 3)$, βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u} + \vec{w}$, $\vec{w} - \vec{v}$, $2\vec{w} + \vec{u}$, και σχεδιάστε τα σημεία που έχουν αυτά τα διανύσματα ως διανύσματα θέσης.

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε **ορθογώνια** συστήματα αναφοράς, δηλαδή αυτά στα οποία οι δύο άξονες τέμνονται σε ορθή γωνία. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ με τα αντίστοιχα **μοναδιαία** διανύσματα, δηλαδή διανύσματα μήκους 1,

$$\vec{i} = \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u}, \quad \vec{j} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}.$$



Σχήμα 1.25: Ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς.

Ένα σύστημα αναφοράς με ορθογώνιους άξονες και μοναδιαία διανύσματα ονομάζεται **ορθοκανονικό**, Σχήμα 1.25.

Δραστηριότητα 1.23 Σχεδιάστε τα σημεία A, B, C στις κορυφές ενός ορθογωνίου τριγώνου με μήκη πλευρών $|AB| = 3$, $|BC| = 4$ και $|AC| = 5$. Θεωρήστε το σύστημα αναφοράς $(B, \vec{u}, \vec{v})$ με $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Σημειώστε το σημείο D με συντεταγμένες $(1, 1)$ ως προς το $(B, \vec{u}, \vec{v})$.

Θεωρήστε το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(B, \vec{i}, \vec{j})$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα που προκύπτουν από τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ αντίστοιχα. Σημειώστε το σημείο E με συντεταγμένες $(1, 1)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(B, \vec{i}, \vec{j})$. Βρείτε τις συντεταγμένες του D ως προς το σύστημα αναφοράς $(B, \vec{i}, \vec{j})$.

Το ακόλουθο Λήμμα δείχνει ότι οι συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς σχετίζονται με το εσωτερικό γινόμενο.

Λήμμα 1.10 Έστω $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς. Τότε οι συντεταγμένες (a, b) ενός διανύσματος $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j}$ δίδονται από το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{w}$ με τα αντίστοιχα διανύσματα του συστήματος αναφοράς:

$$a = \vec{w} \cdot \vec{i}, \quad b = \vec{w} \cdot \vec{j}$$

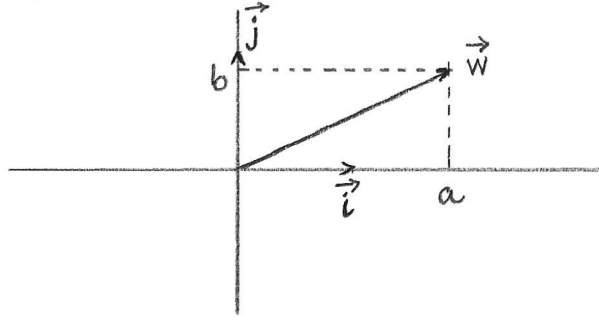
Απόδειξη. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ και $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$. Υπολογίζουμε τα εσωτερικά γινόμενα, Σχήμα 1.26,

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \vec{i} &= (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot \vec{i} \\ &= a\vec{i} \cdot \vec{i} + b\vec{j} \cdot \vec{i} \\ &= a \end{aligned}$$

και παρόμοια,

$$\vec{w} \cdot \vec{j} = b.$$

□



Σχήμα 1.26: Συντεταγμένες ως προς ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς.

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, και διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ με σημείο εφαρμογής στο O και συντεταγμένες $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ αντίστοιχα (δηλαδή $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$ και $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$). Τότε το άθροισμα $\vec{u} + \vec{v}$ έχει συντεταγμένες $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, δηλαδή

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1) \vec{i} + (u_2 + v_2) \vec{j},$$

και εάν $a \in \mathbb{R}$, το γινόμενο $a \vec{u}$ έχει συντεταγμένες (au_1, au_2) , δηλαδή

$$a \vec{u} = au_1 \vec{i} + au_2 \vec{j}.$$

Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}) \cdot (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}) \\ &= u_1 v_1 \vec{i} \cdot \vec{i} + u_1 v_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + u_2 v_1 \vec{j} \cdot \vec{i} + u_2 v_2 \vec{j} \cdot \vec{j}. \end{aligned}$$

Αλλά $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ και $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, άρα

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$ είναι

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \\ &= \sqrt{(u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}) \cdot (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j})} \\ &= \sqrt{u_1^2 \vec{i} \cdot \vec{i} + u_1 u_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + u_2 u_1 \vec{j} \cdot \vec{i} + u_2^2 \vec{j} \cdot \vec{j}} \\ &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2}. \end{aligned}$$

Δραστηριότητα 1.24 Για τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$, τα σημεία D, E και το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(B, \vec{i}, \vec{j})$ της Δραστηριότητας 1.23, υπολογίστε:

α'. τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}, 2\vec{u} + \vec{v}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE}$,

β'. το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD}$,

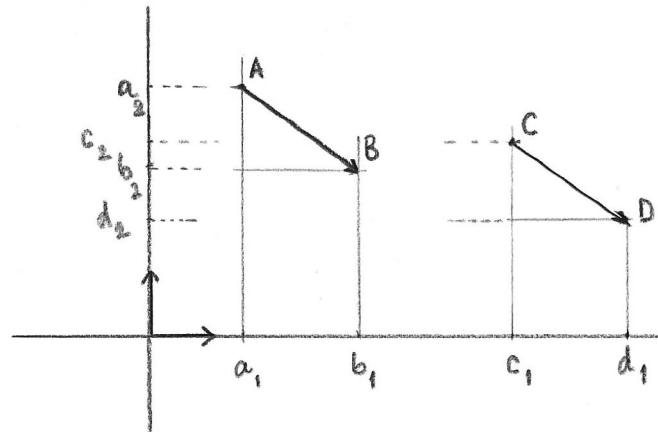
γ'. το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{BD}$.

Συντεταγμένες ελεύθερου διανύσματος

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, και σημεία A, B, C, D με συντεταγμένες $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ και (d_1, d_2) αντίστοιχα, Σχήμα 1.27. Εάν $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, τότε, από τα ίσα τρίγωνα ABM και CDN προκύπτει ότι

$$b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \quad \text{και} \quad b_2 - a_2 = d_2 - c_2 \quad (1.2)$$

Συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $v_1 = b_1 - a_1$ και $v_2 = b_2 - a_2$ δεν εξαρτώνται από το συγκεκριμένο αντιπρόσωπο $\overrightarrow{AB}$, αλλά χαρακτηρίζουν το ελεύθερο διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.



Σχήμα 1.27: Οι συντεταγμένες του ελεύθερου διανύσματος δεν εξαρτώνται από τον αντιπρόσωπο.

Ορισμός 1.19. Συντεταγμένες του ελεύθερου διανύσματος $\vec{v}$ ως προς το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, είναι οι αριθμοί

$$v_1 = b_1 - a_1 \quad \text{και} \quad v_2 = b_2 - a_2,$$

όπου (a_1, a_2) είναι οι συντεταγμένες της αρχής A και (b_1, b_2) είναι οι συντεταγμένες του πέρατος B κάποιου αντιπροσώπου $\overrightarrow{AB}$ του $\vec{v}$.

Εάν $v_1 \neq 0$, ονομάζουμε **συντελεστή διεύθυνσης** του $\vec{v}$ τον αριθμό $\lambda = \frac{v_2}{v_1}$.

Από τις εξισώσεις (1.2) βλέπουμε ότι δύο ελεύθερα διανύσματα είναι ίσα εάν και μόνον εάν οι συντεταγμένες τους είναι μία προς μία ίσες.

Δραστηριότητα 1.25 Για το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(B, \vec{i}, \vec{j})$ της Δραστηριότητας 1.23, βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$. Σημειώστε το σημείο F για το οποίο $\overrightarrow{EF}$ έχει συντεταγμένες $(2, 3)$.

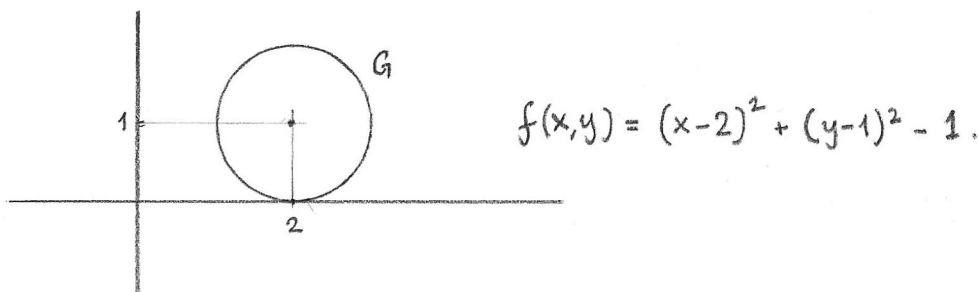
Διάλεξη 4

Γεωμετρικοί Τόποι

Έχοντας επιλέξει ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς στο επίπεδο, μπορούμε να περιγράψουμε γεωμετρικά αντικείμενα του επιπέδου μέσω των συνόλων των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών που αντιστοιχούν στα σημεία τους. Υπάρχουν δύο βασικά διαφορετικοί τρόποι περιγραφής ενός συνόλου που αποτελείται από διατεταγμένα ζεύγη αριθμών: με αναλυτικές εξισώσεις ή σε παραμετρική μορφή. Αυτές οι δύο διαφορετικές προσεγγίσεις οδηγούν, σε πιο προχωρημένο επίπεδο, σε δύο διαφορετικούς κλάδους των σύγχρονων μαθηματικών, την Αλγεβρική Γεωμετρία και τη Διαφορική Γεωμετρία.

Αναλυτικές εξισώσεις

Θεωρούμε το επίπεδο με δεδομένο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, έτσι ώστε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα διατεταγμένο ζεύγος (x, y) . Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ που για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών δίδει έναν αριθμό, προσδιορίζει ένα σύνολο στο επίπεδο με τον ακόλουθο τρόπο. Θεωρούμε όλα τα σημεία $P(p_1, p_2)$ του επιπέδου, για τις συντεταγμένες των οποίων ισχύει $f(p_1, p_2) = 0$: δηλαδή τα σημεία του επιπέδου με συντεταγμένες στο σύνολο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$. Αυτό το υποσύνολο G του επιπέδου ονομάζεται *γεωμετρικός τόπος* της εξίσωσης $f(x, y) = 0$, Σχήμα 1.28. Συχνά ταυτίζουμε το υποσύνολο του επιπέδου με το σύνολο των συντεταγμένων, και αναφερόμαστε στο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ ως το γεωμετρικό τόπο της $f(x, y) = 0$. Λέμε επίσης ότι η εξίσωση $f(x, y) = 0$ είναι η *αναλυτική εξίσωση* του υποσυνόλου G του επιπέδου ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Σχήμα 1.28: Ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y) = 0$.

Ορισμός 1.20. Ο γεωμετρικός τόπος G της εξίσωσης $f(x, y) = 0$ είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου των οποίων οι συντεταγμένες ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ικανοποιούν την εξίσωση $f(x, y) = 0$.

Η εξίσωση $f(x, y) = 0$ είναι η αναλυτική εξίσωση του συνόλου G .

Παράδειγμα 1.5 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = ax + by + c$. Ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $ax + by + c = 0$ είναι το σύνολο (των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες στο) $\{(x, y) : ax + by + c = 0\}$. Γνωρίζουμε ότι αυτό το σύνολο είναι μία ευθεία, τις ιδιότητες της οποίας θα υπενθυμίσουμε στην επόμενη διάλεξη. Η αναλυτική εξίσωση μίας ευθείας, ως προς το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, είναι της μορφής $ax + by + c = 0$.

Παράδειγμα 1.6 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$, όπου $r > 0$. Ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y) = 0$ αποτελείται από τα σημεία για τα οποία $x^2 + y^2 = r^2$, δηλαδή τα σημεία που απέχουν σταθερή απόσταση r από το σημείο $(0, 0)$. Η αναλυτική εξίσωση του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα r , ως προς το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, είναι της μορφής $x^2 + y^2 = r^2$.

Παράδειγμα 1.7 Θέλουμε να περιγράψουμε τον κύκλο με κέντρο το σημείο C , με συντεταγμένες (a, b) , και ακτίνα 3. Εάν το σημείο P , με συντεταγμένες (x, y) , βρίσκεται σε αυτόν τον κύκλο, η απόσταση από το P στο C είναι 3, $|\vec{CP}| = 3$, και συνεπώς $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = 3$. Συμπεραίνουμε ότι ο δεδομένος κύκλος μπορεί να περιγραφεί από τη συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} - 3$.

Αφού $|\vec{CP}| \geq 0$, το ίδιο ακριβώς σύνολο σημείων ικανοποιεί την εξίσωση $|\vec{CP}|^2 = 9$, σε συντεταγμένες $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 9$. Συνεπώς μία απλούστερη περιγραφή του κύκλου δίδεται από τη συνάρτηση $g(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - 9$. Η αναλυτική εξίσωση του κύκλου με κέντρο $C : (a, b)$ και ακτίνα r , είναι $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Παράδειγμα 1.8 Η εξίσωση $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$ ικανοποιείται μόνο από το σημείο P με συντεταγμένες (a, b) .

Δραστηριότητα 1.26 Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $y = 5$;

Προσέξτε ότι όταν μία από τις συντεταγμένες δεν εμφανίζεται στην αναλυτική εξίσωση, δεν σημαίνει ότι η συντεταγμένη παίρνει υποχρεωτικά την τιμή μηδέν. Αντιθέτως, σημαίνει ότι δεν υπάρχει κανένας περιορισμός σε αυτή τη συντεταγμένη, και παίρνει οποιαδήποτε τιμή στο $\mathbb{R}$.

Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $x^2 = 4$;

Παράδειγμα 1.9 Εάν $f(x, y)$ και $g(x, y)$ είναι δύο συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^2$, το γινόμενό τους $f(x, y)g(x, y)$ μηδενίζεται ακριβώς όταν μηδενίζεται τουλάχιστον μία από τις f και g . Έτσι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y)g(x, y) = 0$ είναι η ένωση των γεωμετρικών τόπων

των εξισώσεων $f(x, y) = 0$ και $g(x, y) = 0$. Για παράδειγμα, η εξίσωση $y^2 - x^2 = 0$ ισοδυναμεί με $(y+x)(y-x) = 0$, και ο γεωμετρικός τόπος της είναι η ένωση δύο ευθειών ε_1 και ε_2 , με εξισώσεις $y+x=0$ και $y-x=0$.

Παράδειγμα 1.10 Εάν $f(x, y)$ και $g(x, y)$ είναι δύο συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^2$, το άθροισμα των τετραγώνων τους $f(x, y)^2 + g(x, y)^2$ μηδενίζεται ακριβώς όταν μηδενίζονται και οι δύο συναρτήσεις f και g . Έτσι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y)^2 + g(x, y)^2 = 0$ είναι η τομή των γεωμετρικών τόπων των εξισώσεων $f(x, y) = 0$ και $g(x, y) = 0$, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Παραμετρική περιγραφή

Σε αυτή την περίπτωση περιγράφουμε ένα υποσύνολο του επιπέδου ως την εικόνα μίας απεικόνισης από την ευθεία στο επίπεδο.

Θεωρούμε συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$, και την απεικόνιση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία αντιστοιχίζει στον αριθμό t το διατεταγμένο ζεύγος $(x(t), y(t))$. Τότε καθώς η παράμετρος t παίρνει διαφορετικές τιμές σε κάποιο διάστημα στο $\mathbb{R}$, το σημείο $P(t)$ με συντεταγμένες $(x(t), y(t))$ διαγράφει μία καμπύλη στο επίπεδο.

Ορισμός 1.21. Οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ αποτελούν **παραμετρική περιγραφή** του συνόλου G του επιπέδου εάν για κάθε σημείο του G υπάρχει τουλάχιστον ένα t τέτοιο ώστε οι συντεταγμένες του σημείου ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$ είναι $(x(t), y(t))$.

Παράδειγμα 1.11 Η ευθεία στο επίπεδο που περνάει από τα σημεία $A: (1, 2)$ και $B: (-1, 3)$ έχει παραμετρική περιγραφή $f(t) = (1-2t, 2+t)$. Πράγματι, εάν το σημείο $X: (x, y)$ βρίσκεται στην ευθεία που περνάει από τα A, B , το διάνυσμα $\overrightarrow{AX}$ είναι πολλαπλάσιο του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (-2, 1)$, και συνεπώς $(x-1, y-2) = t(-2, 1)$. Άρα μία παραμετρική περιγραφή της ευθείας AB είναι

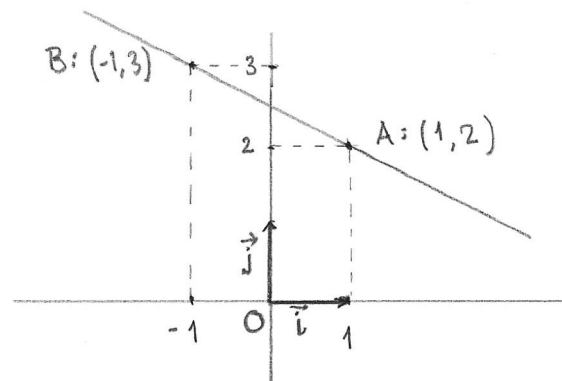
$$(x, y) = (1 - 2t, 2 + t).$$

Μπορούμε να γράψουμε την παραμετρική περιγραφή σε **διανυσματική μορφή**, εκφράζοντας το διάνυσμα θέσης ενός σημείου της ευθείας ως συνάρτηση της παραμέτρου t :

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$

ή σε συντεταγμένες $(x, y) = (1, 2) + t(-2, 1)$.

Δραστηριότητα 1.27 Βρείτε την παραμετρική περιγραφή της ευθείας που περνάει από τα σημεία $C: (1, 1)$ και $D: (3, 2)$.



Σχήμα 1.29: Παραμετρική περιγραφή της ευθείας AB.

Παράδειγμα 1.12 Ο κύκλος με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα r έχει παραμετρική περιγραφή, με παράμετρο θ για $0 \leq \theta < 2\pi$,

$$f(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Μία διαφορετική παραμετρική περιγραφή του κύκλου ακτίνας r , που δεν χρησιμοποιεί τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είναι η

$$x(t) = t, \quad y(t) = \sqrt{r^2 - t^2}, \quad \text{για } -r \leq t \leq r.$$

Αυτή η παραμέτρηση καλύπτει μόνο το ημικύκλιο όπου $y \geq 0$. Για να καλύψουμε όλο τον κύκλο χρειαζόμαστε και μία δεύτερη παραμέτρηση,

$$x(t) = t, \quad y(t) = -\sqrt{r^2 - t^2}, \quad \text{για } -r \leq t \leq r.$$

Δραστηριότητα 1.28 Βρείτε την παραμετρική περιγραφή του κύκλου με κέντρο στο σημείο $(1, 1)$ και ακτίνα 2.

Εάν γνωρίζουμε την παραμετρική περιγραφή ενός συνόλου, μπορούμε να βρούμε τις αναλυτικές εξισώσεις με *απαλοιφή των παραμέτρων*. Θεωρούμε την ευθεία στο επίπεδο, με παραμετρικές συναρτήσεις $x(t) = 1 - t$ και $y(t) = 2 - 3t$. Λύνοντας ως προς t έχουμε

$$t = 1 - x \quad \text{και} \quad t = \frac{2 - y}{3}.$$

Εξισώνουμε τις δύο εκφράσεις για την παράμετρο t και έχουμε

$$1 - x = \frac{1}{3}(2 - y)$$

απ' όπου παίρνουμε την εξίσωση της ευθείας $3x + y - 5 = 0$.

Δραστηριότητα 1.29 Δίδεται η παραμετρική περιγραφή μίας ευθείας $(x, y) = (-1, 1) + t(1, 1)$. Βρείτε το σημείο της ευθείας που αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου $t = 1$.

Βρείτε και το σημείο για $t = -1$.

Απαλείψτε την παραμετρο t για να βρείτε την αναλυτική εξίσωση της ευθείας.

Ευθείες στο επίπεδο

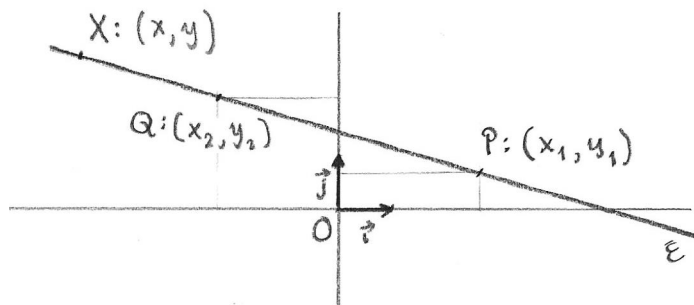
Μία ευθεία ε στο επίπεδο προσδιορίζεται εάν γνωρίζουμε δύο σημεία της, ή εάν γνωρίζουμε ένα σημείο της ευθείας και ένα διάνυσμα στη διεύθυνση της ευθείας.

Θεωρούμε δύο σημεία P και Q , με συντεταγμένες (x_1, y_1) και (x_2, y_2) αντίστοιχα, και ε την ευθεία που περνάει από τα σημεία P και Q . Εάν $X : (x, y)$ είναι το γενικό σημείο πάνω στην ευθεία ε , το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ είναι συγγραμμικό με το $\overrightarrow{PQ}$, και συνεπώς $\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ}$ για κάποιο αριθμό t . Έτσι βρίσκουμε την παραμετρική περιγραφή για το διάνυσμα θέσης του σημείου X :

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ},$$

ή σε συντεταγμένες

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1). \quad (1.3)$$



Σχήμα 1.30: Η ευθεία από τα σημεία P και Q .

Εάν $x_2 - x_1 = 0$, η 1.3 δίδει την εξίσωση $x = x_1$. Εάν $y_2 - y_1 = 0$, η 1.3 δίδει την εξίσωση $y = y_1$. Υπενθυμίζουμε ότι μία μεταβλητή που δεν εμφανίζεται σε μία εξίσωση, μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Έτσι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $x = x_1$ αποτελείται από όλα τα σημεία με συντεταγμένες (x_1, y) για $y \in \mathbb{R}$, δηλαδή μία ευθεία παράλληλη προς τον y -άξονα.

Εάν $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0$, μπορούμε να απαλείψουμε την παράμετρο t από τις σχέσεις $x - x_1 = t(x_2 - x_1)$ και $y - y_1 = t(y_2 - y_1)$, για να πάρουμε την αναλυτική εξίσωση της ευθείας ε ,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

ή

$$(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y - (y_2 - y_1)x_1 + (x_2 - x_1)y_1 = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση είναι της μορφής $Ax + By + C = 0$.

Θεωρούμε το σημείο $P : (x_1, y_1)$ και το διάνυσμα $\vec{a} = (u, v)$. Η ευθεία ε που περνάει από το P και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{a}$ έχει γενικό σημείο $X : (x, y)$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{a}$. Συνεπώς $\overrightarrow{PX} = t\vec{a}$ για κάποιο αριθμό t . Έτσι βρίσκουμε την παραμετρική περιγραφή για το διάνυσμα θέσης του σημείου X :

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{a},$$

ή σε συντεταγμένες

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(u, v).$$

Εάν $u = 0$ η ευθεία ε είναι παράλληλη με τον y -άξονα, και έχει αναλυτική εξίσωση $x = x_1$.
Εάν $v = 0$ η ευθεία ε είναι παράλληλη με τον x -άξονα, και έχει αναλυτική εξίσωση $y = y_1$.

Εάν $uv \neq 0$, μπορούμε να απαλείψουμε την παράμετρο t από τις σχέσεις $x - x_1 = tu$ και $y - y_1 = tv$, για να πάρουμε την αναλυτική εξίσωση της ευθείας ε ,

$$\frac{x - x_1}{u} = \frac{y - y_1}{v},$$

ή

$$vx - uy - vx_1 + uy_1 = 0.$$

Παρατηρούμε ότι και αυτή η εξίσωση είναι της μορφής $Ax + By + C = 0$.

Θα δείξουμε ότι κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + C = 0$, όπου τα A, B δεν είναι και τα δύο μηδέν παριστάνει μία ευθεία.

Πρόταση 1.11 Ο γεωμετρικός τόπος μίας εξίσωσης της μορφής

$$Ax + By + C = 0, \tag{1.4}$$

όπου τα A, B δεν είναι και τα δύο μηδέν, είναι μία ευθεία στο επίπεδο.

Απόδειξη. Εάν $A = 0$, τότε $B \neq 0$, και η εξίσωση $Ax + By + C = 0$ γίνεται $y = -C/B$. Ο γεωμετρικός τόπος αυτής της εξίσωσης είναι όλα τα σημεία με δεύτερη συντεταγμένη $-C/B$, δηλαδή μία ευθεία παράλληλη με τον x -άξονα, που τέμνει τον y -άξονα στο σημείο $(0, -C/B)$.

Παρόμοια, εάν $B = 0$ και $A \neq 0$, η εξίσωση 1.4 γίνεται $x = -C/A$, και ο γεωμετρικός τόπος είναι μία ευθεία παράλληλη με τον y -άξονα που τέμνει τον x -άξονα στο σημείο $(-C/A, 0)$.

Εάν τώρα $AB \neq 0$, ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης 1.4 περιέχει τα σημεία $P : (-C/A, 0)$ και $Q : (1 - (C/A), -A/B)$. Θα δείξουμε ότι εάν $X : (x, y)$ είναι οποιοδήποτε άλλο σημείο που ικανοποιεί την εξίσωση, το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ είναι συγγραμμικό με το $\overrightarrow{PQ}$, και συνεπώς το σημείο X βρίσκεται στην ευθεία που περνάει από τα P και Q .

Το διάνυσμα $\overrightarrow{PQ}$ έχει συντεταγμένες $(1, -A/B)$. Αφού $Ax + By + C = 0$, έχουμε $y = -\frac{Ax+C}{B}$, και συνεπώς το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ έχει συντεταγμένες

$$\left(x + \frac{C}{A}, y\right) = \left(\frac{Ax+C}{A}, -\frac{Ax+C}{B}\right) = \frac{Ax+C}{A} \left(1, -\frac{A}{B}\right).$$

Άρα $\overrightarrow{PX}$ και $\overrightarrow{PQ}$ είναι συγγραμμικά, και X βρίσκεται στην ευθεία ε . □

Δραστηριότητα 1.30 Σχεδιάστε τις ευθείες με τις ακόλουθες εξισώσεις ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{array}{ll} \alpha') & x = 3 \\ \beta') & y = 2 \\ \gamma') & x + y = 0 \\ \delta') & x + y = 2 \\ \varepsilon') & x - y = 0 \\ \zeta') & x - y = -3 \end{array}$$

Πρόταση 1.12 Εάν $P : (x_1, y_1)$ και $Q : (x_2, y_2)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία της ευθείας ε με εξίσωση $Ax + By + C = 0$,

α'. Το διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$ είναι κάθετο προς το $\overrightarrow{PQ}$. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα συγγραμμικό με το διάνυσμα $\vec{n}$ λέγεται **κάθετο διάνυσμα** της ευθείας ε .

β'. Το διάνυσμα $\vec{u} = (B, -A)$ είναι συγγραμμικό με το $\overrightarrow{PQ}$. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα συγγραμμικό με το διάνυσμα $\vec{u}$ λέγεται **διάνυσμα διεύθυνσης** της ευθείας ε .

γ'. Εάν $B \neq 0$, τότε

$$-\frac{A}{B} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ο αριθμός $\lambda = -A/B$ ονομάζεται **συντελεστής διεύθυνσης** ή **κλήση** της ευθείας ε .

δ'. Η ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + C = 0$, τέμνει τον x -άξονα στο σημείο με συντεταγμένες $(-C/A, 0)$ και τον y -άξονα στο σημείο με συντεταγμένες $(0, -C/B)$.

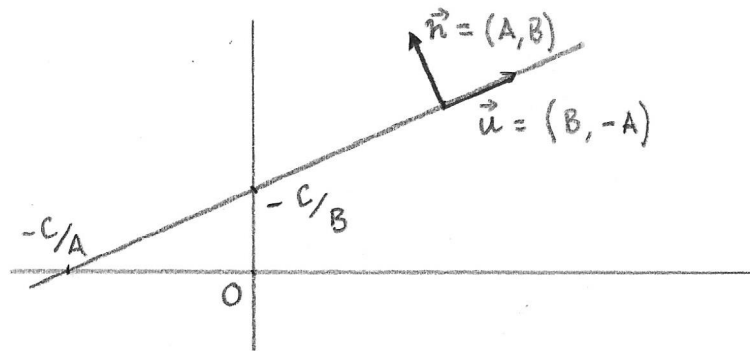
Απόδειξη. Αφού $Ax_1 + By_1 + C = 0$ και $Ax_2 + By_2 + C = 0$, έχουμε $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$.

α'. Το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ με το διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$ είναι $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$. Άρα $\vec{n}$ είναι κάθετο προς το $\overrightarrow{PQ}$.

β'. Το διάνυσμα $\vec{u} = (B, -A)$ είναι συγγραμμικό με το $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ εάν υπάρχει μ τέτοιο ώστε $x_2 - x_1 = \mu B$ και $y_2 - y_1 = -\mu A$. Αυτό το σύστημα εξισώσεων έχει μοναδική λύση για τα x, y όταν $A(x_2 - x_1) = -B(y_2 - y_1)$.

γ'. Εάν $B \neq 0$, διαιρώντας την $y_2 - y_1 = -\mu A$ με την $x_2 - x_1 = \mu B$, έχουμε

$$-\frac{A}{B} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Σχήμα 1.31: Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + C = 0$.

□

Δραστηριότητα 1.31 Εξηγήστε γιατί στην εξίσωση της ευθείας στο Σχήμα 1.31 οι συντελεστές είναι $A < 0$, $B > 0$ και $C < 0$. Τί θα άλλαζε στο Σχήμα εάν πολλαπλασιάζαμε και τους τρεις συντελεστές με -1 ;

Δραστηριότητα 1.32 Βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα, ένα διάνυσμα διεύθυνσης και την κλίση, για τις ακόλουθες ευθείες στο επίπεδο.

$$\alpha') 2x + 3y = 5, \quad \beta') 3x = 2y - 5.$$

Θεωρούμε τις ευθείες ε_1 και ε_2 , με εξισώσεις $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ αντίστοιχα, με $B_1B_2 \neq 0$ και συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = -A_1/B_1$ και $\lambda_2 = -A_2/B_2$.

Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες εάν οι συντελεστές διεύθυνσης είναι ίσοι, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται κάθετα εάν το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης είναι -1 , $\lambda_1\lambda_2 = -1$.

Εάν $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, τότε οι ευθείες δεν είναι παράλληλες και τέμνονται σε ένα σημείο.

Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες (x_0, y_0) του κοινού σημείου, λύνουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1 \\ -C_2 \end{bmatrix},$$

και βρίσκουμε

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y_0 = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Δραστηριότητα 1.33 Βρείτε το σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις

$$x - y - 1 = 0, \quad x + 2y - 4 = 0.$$

Συντεταγμένες σημείου πάνω σε ευθεία

Εάν τα σημεία P_1 , P_2 και P βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία, έχουμε ορίσει τον απλό λόγο $\mu = (P_1 P_2 P) = \frac{(P_1 P)}{(P P_2)}$, Ορισμός 1.11. Εάν τα σημεία έχουν συντεταγμένες $P_1 : (x_1, y_1)$, $P_2 : (x_2, y_2)$ και $P : (x, y)$ ως προς το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, τότε $\overrightarrow{P_1 P} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$ και $\overrightarrow{P P_2} = (x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j}$. Από τη σχέση $\overrightarrow{P_1 P} = \mu \overrightarrow{P P_2}$, συμπεραίνουμε ότι

$$x - x_1 = \mu(x_2 - x) \quad \text{και} \quad y - y_1 = \mu(y_2 - y).$$

Άρα οι συντεταγμένες του σημείου P δίδονται συναρτήσει των συντεταγμένων των P_1 και P_2 , και του απλού λόγου $\mu = (P_1 P_2 P)$ από τους τύπους

$$x = \frac{x_1 + \mu x_2}{1 + \mu} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + \mu y_2}{1 + \mu}. \quad (1.5)$$

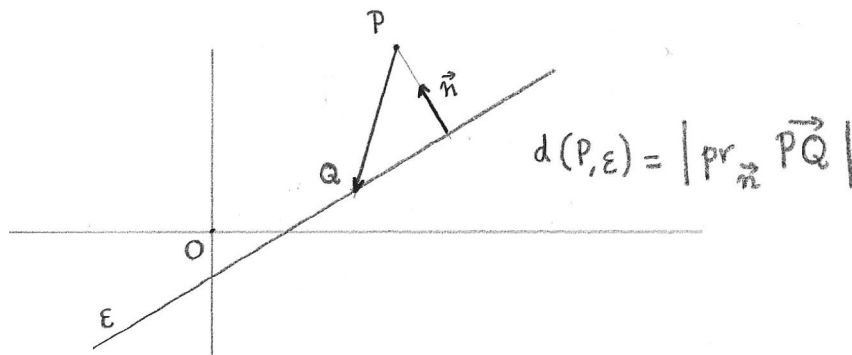
Όταν $\mu > 0$, το P βρίσκεται μεταξύ των P_1 και P_2 , και οι τύποι δίδουν τις συντεταγμένες του σημείου που χωρίζει το διάστημα $P_1 P_2$ σε δύο τμήματα με λόγο $\mu : 1$.

Δραστηριότητα 1.34 Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου που χωρίζει το διάστημα AB , με $A : (3, -1)$ και $B : (-2, 3)$ σε λόγο $3 : 2$.

Απόσταση σημείου από ευθεία

Θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση $d(P, \varepsilon)$ του σημείου $P : (x_0, y_0)$ από την ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + C = 0$. Εάν Q είναι οποιοδήποτε σημείο της ευθείας ε , η απόσταση $d(P, \varepsilon)$ είναι ίση με το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{PQ}$ σε ένα κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$ της ευθείας ε , Σχήμα 1.32,

$$d(P, \varepsilon) = |\text{pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{PQ}|.$$



Σχήμα 1.32: Απόσταση σημείου από ευθεία.

Εάν το σημείο Q έχει συντεταγμένες (x_1, y_1) , τότε

$$\begin{aligned} |\text{pr}_{\vec{n}} \vec{PQ}| &= \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|(x_0 - x_1, y_0 - y_1) \cdot (A, B)|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|(Ax_0 + By_0 + C) - (Ax_1 + By_1 + C)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Αλλά οι συντεταγμένες του σημείου Q ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας ε , δηλαδή $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Συνεπώς

$$|\text{pr}_{\vec{n}} \vec{PQ}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Πρόταση 1.13 Η απόσταση $d(P, \varepsilon)$ του σημείου $P : (x_0, y_0)$ από την ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + C = 0$ είναι

$$d(P, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (1.6)$$

Δραστηριότητα 1.35 Βρείτε την απόσταση της ευθείας $2x + y - 3 = 0$ από το σημείο αναφοράς O .

Εφαρμογές στη γεωμετρία του τριγώνου

Θα αποδείξουμε το Θεώρημα των Διαμέσων: οι τρεις διάμεσοι ενός τριγώνου έχουν ένα κοινό σημείο, το **κέντρο βάρους** του τριγώνου.

Πρόταση 1.14 Θεωρούμε το τρίγωνο ABC , του οποίου οι κορυφές έχουν συντεταγμένες (a_1, a_2) , (b_1, b_2) και (c_1, c_2) αντίστοιχα. Το σημείο A' είναι το μέσο της πλευράς BC , το B' είναι το μέσο της πλευράς CA και το C' είναι το μέσο της πλευράς AB . Τότε οι ευθείες AA' , BB' και CC' τέμνονται σε ένα σημείο G , με συντεταγμένες

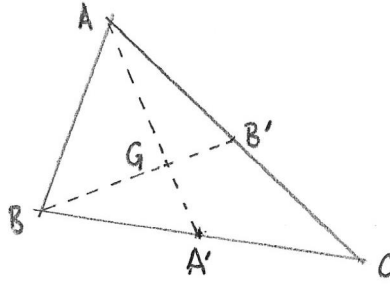
$$\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right).$$

Το σημείο $A' : (a'_1, a'_2)$ διαιρεί το διάστημα BC σε λόγο 1:1, και από την (1.5) έχουμε τις συντεταγμένες του

$$a'_1 = \frac{b_1 + c_1}{2} \quad a'_2 = \frac{b_2 + c_2}{2}.$$

Παρόμοια για το $B' : (b'_1, b'_2)$

$$b'_1 = \frac{a_1 + c_1}{2} \quad b'_2 = \frac{a_2 + c_2}{2}.$$



Σχήμα 1.33: Οι διάμεσοι τριγώνου.

Το σημείο τομής των AA' και BB' έχει διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AA'}$ και επίσης $\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BB'}$. Δηλαδή υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί s και t τέτοιοι ώστε

$$\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BB'}.$$

Σε συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{aligned} a_1 + s \left(\frac{b_1 + c_1}{2} - a_1 \right) &= b_1 + t \left(\frac{a_1 + c_1}{2} - b_1 \right) \\ a_2 + s \left(\frac{b_2 + c_2}{2} - a_2 \right) &= b_2 + t \left(\frac{a_2 + c_2}{2} - b_2 \right) \end{aligned}$$

και συγκεντρώνοντας τους όμοιους όρους έχουμε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν οι αριθμοί s, t :

$$\begin{aligned} \left(-a_1 + \frac{b_1}{2} + \frac{c_1}{2} \right) s + \left(b_1 - \frac{a_1}{2} - \frac{c_1}{2} \right) t &= b_1 - a_1 \\ \left(-a_2 + \frac{b_2}{2} + \frac{c_2}{2} \right) s + \left(b_2 - \frac{a_2}{2} - \frac{c_2}{2} \right) t &= b_2 - a_2 \end{aligned}$$

Τα διανύσματα $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}$ δεν είναι παράλληλα και συνεπώς οι συντελεστές της πρώτης εξίσωσης δεν είναι πολλαπλάσια των συντελεστών της δεύτερης εξίσωσης. Άρα οι εξισώσεις έχουν μοναδική λύση, την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε: $s = \frac{2}{3}, t = \frac{2}{3}$. Συμπεραίνουμε ότι σημείο τομής των ευθειών AA' και BB' είναι το σημείο G το οποίο ικανοποιεί

$$(AA'G) = (BB'G) = 2$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι το σημείο τομής G' των AA' και CC' ικανοποιεί

$$(AA'G') = (CC'G') = 2,$$

και συνεπώς $G = G'$.

Τέλος μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα θέσης και τις συντεταγμένες του G :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \\
 &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}) \\
 &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\right) \\
 &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\
 &= \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right).
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.13 Θεωρήστε το τρίγωνο με κορυφές $A : (1, 4)$, $B : (0, 0)$ και $C : (3, 1)$ και ύψη AA' , BB' , CC' . Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα για να δείξετε ότι τα τρία ύψη τέμνονται σε ένα σημείο, το **ορθόκεντρο** του τριγώνου ABC .

α'. Σχεδιάστε το τρίγωνο ABC .

β'. Η πλευρά BC έχει κλίση $\lambda_{BC} = 1/3$. Άρα η ευθεία AA' έχει κλίση -3 και περνάει από το σημείο $(1, 4)$. Συνεπώς η εξίσωση της AA' είναι $3x + y - 7 = 0$.

γ'. Η πλευρά CA έχει κλίση $\lambda_{CA} = -3/2$. Άρα η ευθεία BB' έχει κλίση $2/3$ και περνάει από το σημείο $(0, 0)$. Συνεπώς η εξίσωση της BB' είναι $2x - 3y = 0$.

δ'. Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων και βρίσκουμε ότι τέμνονται στο σημείο $(\frac{21}{11}, \frac{14}{11})$.

ε'. Η ευθεία CC' έχει εξίσωση $x + 4y - 7 = 0$. Ελέγχουμε ότι το σημείο $(\frac{21}{11}, \frac{14}{11})$ βρίσκεται και σε αυτή την ευθεία.

Ασκήσεις 2

Άσκηση 2.1 Θεωρήστε δύο μη συγγραμμικά διανύσματα, $\vec{u}$ και $\vec{w}$, τέτοια ώστε $|\vec{u} + 2\vec{w}| = |\vec{u}|$. Δείξτε ότι $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = 0$. (Συγκρίνατε με την Άσκηση 1.2.) Παρατηρήστε ότι $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = 0$ μπορεί να ισχύει, παρ' όλο που $\vec{w} \neq 0$ και $\vec{u} + \vec{w} \neq 0$!

Άσκηση 2.2 Σημειώστε δύο σημεία A, B , στο επίπεδο, και βρείτε σημεία C, D, E τέτοια ώστε:

α'. $|\vec{AC}| = 2|\vec{AB}|$ και $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 0$.

β'. $\vec{AD} = 2\vec{AB}$. Παρατηρήστε ότι τότε $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = 2|\vec{AB}|^2$.

γ'. $|\vec{AE}| = 2|\vec{AB}|$ και $\vec{AE} \cdot \vec{AB} = -|\vec{AB}|^2$.

Άσκηση 2.3 Αν τα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι κάθετα και έχουν ίδιο μήκος, δείξτε ότι και τα $2\vec{u} + 3\vec{v}$, $6\vec{u} - 4\vec{v}$ είναι κάθετα.

Άσκηση 2.4 Θεωρήστε τρία σημεία O, A, B που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Εάν το σημείο X βρίσκεται στην ευθεία που περνάει από τα A και B , και ο απλός λόγος $(ABX) = \mu$, βρείτε a και b τέτοια ώστε $\vec{OX} = a\vec{OA} + b\vec{OB}$.

Άσκηση 2.5 Αποδείξτε ότι για κάθε τρίγωνο ABC ισχύει: $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$. Εάν για τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ισχύει ότι $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$, τότε αποδείξτε πως υπάρχει τρίγωνο ABC τέτοιο ώστε $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{BC} = \vec{v}$, $\vec{CA} = \vec{w}$.

Άσκηση 2.6 Αν το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο, a είναι το μήκος της πλευράς του, $\vec{u} = \vec{AB}$, και $\vec{v} = \vec{BC}$, υπολογίστε το μήκος του $\vec{u} + 3\vec{v}$ ως συνάρτηση του a .

Άσκηση 2.7 Δείξτε ότι εάν $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ είναι μη συγγραμμικά διανύσματα και $a\vec{OA} = b\vec{OB}$, τότε $a = 0$ και $b = 0$.

Άσκηση 2.8 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 2.7 για να δείξετε ότι οι συντεταγμένες ενός σημείου P του επιπέδου ως προς ένα σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$ είναι μοναδικές: εάν (s, t) και (x, y) είναι συντεταγμένες του ίδιου σημείου P , τότε $s = x$ και $t = y$.

Άσκηση 2.9 Δίδεται (μη εκφυλισμένο) παραλληλόγραμμο $OBCD$, και σημεία E, F τέτοια ώστε $\vec{OE} = a\vec{OB}$ και $\vec{OF} = b\vec{OD}$, με $b \neq 1$. Δείξτε ότι τα σημεία E, C, F είναι συγγραμμικά εάν και μόνον εάν $a = \frac{b}{b-1}$.

Υπόδειξη: Σχεδιάστε κατάλληλο σχήμα. Εκφράστε τη σχέση μεταξύ των $\vec{CE}$ και $\vec{CF}$ συναρτήσει των $\vec{OB}$ και $\vec{OD}$, και μετά χρησιμοποιήστε την 2.7.

Άσκηση 2.10 Σχεδιάστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ABC . Θεωρήστε το (μη ορθοκανονικό) σύστημα αναφοράς $(A, \vec{u}, \vec{w})$, όπου $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ και $\vec{w} = -\overrightarrow{AC}$. Σημειώστε στο σχήμα τα σημεία P και Q με συντεταγμένες ως προς $(A, \vec{u}, \vec{w})$, $P : (2, 1)$ και $Q : (1, 1)$. Σχεδιάστε τις προβολές $\vec{r} = \text{pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AP}$ και $\vec{t} = \text{pr}_{\vec{w}}\overrightarrow{AP}$, και βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{r}$ και $\vec{t}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(A, \vec{u}, \vec{w})$. Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων με συντεταγμένες (s, t) και (x, y) ως προς το σύστημα αναφοράς $(A, \vec{u}, \vec{w})$.

Άσκηση 2.11 Θεωρήστε το παραλληλόγραμμο $ABCD$. Τα σημεία A, B, C έχουν συντεταγμένες ως προς ένα (μη ορθοκανονικό) σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , (c_1, c_2) , αντίστοιχα. Υπολογίστε τις συντεταγμένες του σημείου D και του σημείου τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου. Υπολογίστε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ και $\overrightarrow{DA}$.

Άσκηση 2.12 Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς θεωρήστε τα διανύσματα $\vec{u} = (s, t)$, $\vec{v} = (-t, s)$ και $\vec{w} = (x, y)$. Υπολογίστε τα μέτρα των προβολών $\text{pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ και $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$.

Άσκηση 2.13 Περιγράψτε γεωμετρικά τα ακόλουθα σύνολα στο επίπεδο

$$\alpha'. \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y + \sqrt{2} = 0\}$$

$$\beta'. \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\}$$

$$\gamma'. \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y - 1)(2x - y) = 0\}$$

$$\delta'. \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0\}$$

$$\epsilon'. \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2xy\}$$

Άσκηση 2.14 Χρησιμοποιήστε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$ για να απαλείψετε την παράμετρο ϑ από την παραμετρική περιγραφή του Παραδείγματος 1.12 και να βρείτε την αναλυτική εξίσωση του κύκλου.

Άσκηση 2.15 Θεωρήστε την ευθεία ε_t που περνάει από τα σημεία $P : (3, 2)$ και $Q_t : (t, 4)$ για $t \in \mathbb{R}$.

α' . Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_t .

β' . Για ποιά τιμή του t είναι η ευθεία ε_t κάθετη στην ευθεία $\zeta : 2x - y + 5 = 0$;

γ' . Βρείτε την τιμή t_0 για την οποία η ευθεία ε_{t_0} είναι παράλληλη προς την ζ .

δ' . Για $t \neq t_0$, βρείτε το σημείο τομής της ε_t με την ζ .

Άσκηση 2.16 Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $2x + 3y + 5 = 0$ και μαζί με τους άξονες του συστήματος αναφοράς περικλείουν τρίγωνο με εμβαδόν 6.

Άσκηση 2.17 Δίδεται η ευθεία ε με εξίσωση $2x - 3y - 3 = 0$. Βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού ως προς την ε του σημείου $P : (x_1, y_1)$, δηλαδή του σημείου $Q : (x_2, y_2)$ έτσι ώστε η ε να είναι η μεσοκάθετος του PQ .

Άσκηση 2.18 Σχεδιάστε τις ευθείες με τις ακόλουθες εξισώσεις ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{array}{ll} \alpha') & 2x + 3y + 6 = 0 \\ \gamma') & 3x - 2y + 6 = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \beta') & 2x + 3y - 6 = 0 \\ \delta') & 3x - 2y - 6 = 0 \end{array}$$

Άσκηση 2.19 Βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα, ένα διάνυσμα διεύθυνσης και την κλίση, για την ευθεία στο επίπεδο με παραμετρική περιγραφή $(x, y) = (1 - 2t, 3 + t)$.

Άσκηση 2.20 Βρείτε το ύψος από το A του τριγώνου ABC , με $A : (-1, 3)$, $B : (1, -1)$, $C : (4, 1)$.

Κεφάλαιο 2

Γεωμετρικά διανύσματα στο χώρο

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζουμε τα γεωμετρικά διανύσματα στο χώρο και τις πράξεις μεταξύ τους. Ιδιαίτερη προσοχή δίδεται στην πράξη του εξωτερικού γινομένου, που περιγράφει τον προσανατολισμό και το μέγεθος του παραλληλογράμμου που ορίζεται από δύο διανύσματα στο χώρο. Επιλέγοντας ένα σύστημα αναφοράς, χρησιμοποιούμε αλγεβρικές μεθόδους για να μελετήσουμε επίπεδα και ευθείες στο χώρο. Τέλος εξετάζουμε ευκλείδειους μετασχηματισμούς του επιπέδου και του χώρου και τη δυϊκότητα μεταξύ μετασχηματισμών και αλλαγής συστήματος αναφοράς.

Διάλεξη 5

Συμβολίζουμε E^3 τον Ευκλείδειο χώρο.

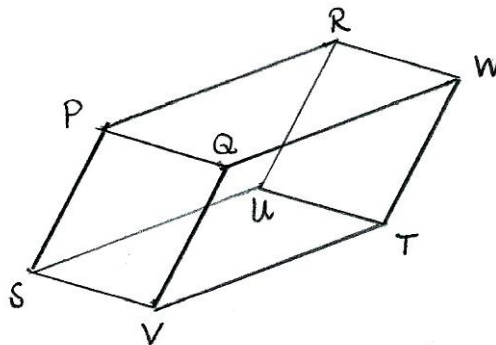
Ορισμός 2.1. Ένα σχήμα που αποτελείται από τέσσερα σημεία A, B, C, D στο E^3 και τα τμήματα των ευθειών AB, BC, CD και DA που τα συνδέουν, ονομάζεται **παραλληλόγραμμο** εάν το μέσο M του διαστήματος AC συμπίπτει με το μέσο του BD , (Σχήμα 1.1). Αυτό το παραλληλόγραμμο το συμβολίζουμε $ABCD$. Τα ευθύγραμμα τμήματα AB, BC, CD και DA είναι οι πλευρές του παραλληλογράμμου $ABCD$, ενώ τα σημεία A, B, C, D είναι οι κορυφές του παραλληλογράμμου $ABCD$.

Τα σύμβολα $ABCD, BCDA, CDAB, DABC, ADCB, DCBA, CBAD$ και $BADC$ δηλώνουν όλα το ίδιο παραλληλόγραμμο, με διαγωνίους AC και BD . Παρατηρήστε ότι το $ABCD$ και το $ABDC$ είναι και τα δύο παραλληλόγραμμα μόνον όταν $A = B$ και $C = D$.

Εάν τέσσερα σημεία του χώρου σχηματίζουν ένα παραλληλόγραμμο, αυτά βρίσκονται σε ένα επίπεδο: το επίπεδο που περιέχει τις διαγωνίους του παραλληλογράμμου. Η Πρόταση 1.1 ισχύει επίσης για παραλληλόγραμμο στο χώρο.

Ορισμός 2.2. Θεωρούμε τέσσερα σημεία P, Q, R, S στο E^3 . Το **παραλληλεπίπεδο με ακμές PQ, PR, PS** είναι το σχήμα στο χώρο που αποτελείται από τα σημεία P, Q, R, S, T, U, V, W , τέτοια ώστε να σχηματίζουν τα παραλληλόγραμμα $PQWR, PRUS, PSVQ, TUSV, TVQW$ και $TWRU$, που ονομάζονται πλευρές του παραλληλεπιπέδου. Τα ευθύγραμμα τμήματα $PQ, RW, UT, SV, PR, QW, VT, SU, PS, QV, WT$ και RU είναι οι ακμές του παραλληλεπιπέδου, ενώ τα σημεία P, Q, R, S, T, U, V, W είναι οι κορυφές του παραλληλεπιπέδου με ακμές PQ, PR, PS .

Το παραλληλεπίπεδο με ακμές PQ, PR, PS είναι **εκφυλισμένο** εάν τα σημεία P, Q, R, S βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο στο E^3 .



Σχήμα 2.1: Παραλληλεπίπεδο.

Δραστηριότητα 2.1 Τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ αποτελούν ακμές παραλληλεπίπεδου, του οποίου η κορυφή απέναντι στην O είναι το σημείο D . Σχεδιάστε το παραλληλεπίπεδο και ονοματίστε τις κορυφές του.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα γεωμετρικό διάνυσμα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω στο οποίο διακρίνουμε τα δύο άκρα, την **αρχή** και το **πέρας** του διανύσματος. Στο Κεφάλαιο 1 μελετήσαμε διανύσματα που εφάπτονται στην επιφάνεια του επιπέδου E^2 . Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε διανύσματα στο χώρο E^3 .

Οι βασικές έννοιες που ορίσαμε για τα διανύσματα του επιπέδου, όπως

- σημείο εφαρμογής
- μέτρο ή μήκος
- φοράς
- συγγραμμικότητα
- παράλληλη μεταφορά
- ισοδυναμία διανυσμάτων
- φορά διανύσματος, ομόρροπα ή αντίρροπα διανύσματα

ορίζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και για διανύσματα του χώρου.

Για παράδειγμα, εάν $\overrightarrow{AB}$ είναι ένα διάνυσμα, και A' ένα σημείο του χώρου E^3 , λέμε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ προκύπτει με παράλληλη μεταφορά του $\overrightarrow{AB}$ στο A' , εάν το σημείο B' είναι τέτοιο ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ είναι παραλληλόγραμμο στο χώρο.

Οι πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων με το ίδιο σημείο εφαρμογής, και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με πραγματικό αριθμό, ορίζονται για διανύσματα του χώρου, και ισχύουν οι ιδιότητες της Πρότασης 1.3. Για την απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας (Πρόταση 1.3, β'), εάν τα σημεία O, A, B, C δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε το Σχήμα 1.10 παριστάνει το παραλληλεπίπεδο που κατασκευάζεται με ακμές OA, OB, OC , και εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.1.

Οι πράξεις είναι συμβατές με την παράλληλη μεταφορά σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου, Λήμμα 1.4. Για την απόδειξη αρκεί να θεωρήσουμε ότι εάν το A' δεν βρίσκεται στο επίπεδο των A, B, C , τότε το Σχήμα 1.11 παριστάνει το παραλληλεπίπεδο που κατασκευάζεται με ακμές AB, AC, AA' .

Δραστηριότητα 2.2 Για το παραλληλεπίπεδο της Δραστηριότητας 2.1 εκφράστε τα διανύσματα $\overrightarrow{OD}$ και $\overrightarrow{CD}$ συναρτήσει των $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα στο χώρο, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Η ορθογώνια προβολή του $\vec{u}$ στο $\vec{v}$, $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{u}$, και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ορίζονται όπως και για διανύσματα του επιπέδου:

- $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{u} = \overrightarrow{OA'}$, όπου A' είναι το σημείο στο οποίο η κάθετος από το A τέμνει την ευθεία OB ,
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|(\text{pr}_{\vec{v}}\vec{u})$, όπου η αλγεβρική τιμή $(\text{pr}_{\vec{v}}\vec{u})$ είναι ως προς τον προσανατολισμό της OB που ορίζει το διάνυσμα $\vec{v}$.

Οι ιδιότητες του Λήμματος 1.8 και της Πρότασης 1.9 ισχύουν και για διανύσματα του χώρου.

Τέλος η γωνία $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ ορίζεται ως η κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$ στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία O, A, B . Δεν θα ορίσουμε προσημασμένη γωνία για δύο διανύσματα στο χώρο, καθώς γι' αυτό απαιτείται να προσδιορίσουμε τον προσανατολισμό του επιπέδου που περιέχει τα διανύσματα, και τούτο δεν μπορεί να γίνει με κανονικό τρόπο για όλα τα επίπεδα του χώρου.

Ελεύθερα διανύσματα στο χώρο

Ακριβώς όπως και στην περίπτωση του επιπέδου, εάν $\vec{u}$ είναι ένα διάνυσμα στο χώρο ορίζουμε το ελεύθερο διάνυσμα $[\vec{u}]$ να είναι το σύνολο όλων των εφαρμοστών διανυσμάτων στο χώρο, τα οποία προκύπτουν με παράλληλη μεταφορά του $\vec{u}$ σε κάθε σημείο του χώρου.

$$[\vec{u}] = \{\vec{v} \text{ διάνυσμα στο χώρο, τέτοιο ώστε } \vec{v} \sim \vec{u}\}.$$

Η παράλληλη μεταφορά είναι συμβατή με τις πράξεις διανυσμάτων στο χώρο που έχουμε περιγράψει: πρόσθεση διανυσμάτων, πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό, προβολή διανύσματος σε διάνυσμα, εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε τις αντίστοιχες πράξεις μεταξύ ελεύθερων διανυσμάτων.

Για παράδειγμα, εάν $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, ορίζουμε το άθροισμα των ελεύθερων διανυσμάτων $[\overrightarrow{OA}]$ και $[\overrightarrow{OB}]$

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{OA}] + [\overrightarrow{OB}] &= [\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}] \\ &= [\overrightarrow{OC}]. \end{aligned}$$

Εάν $\vec{u} \sim \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} \sim \overrightarrow{OB}$ και $\vec{w} \sim \overrightarrow{OC}$, τότε

$$[\vec{u}] + [\vec{v}] = [\vec{w}].$$

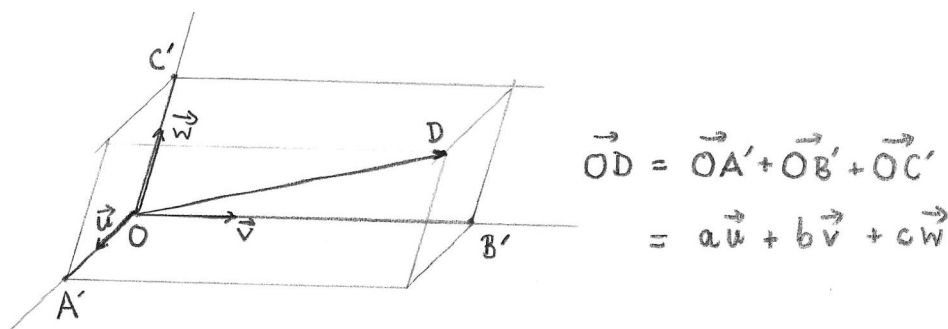
Πρόταση 2.1 Εάν τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε για κάθε (ελεύθερο) διάνυσμα $\vec{z}$ του χώρου, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}.$$

Απόδειξη. Αφού τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, δεν είναι οποιαδήποτε δύο από αυτά συγγραμμικά. Θεωρούμε σημεία O, A, B, C, D τέτοια ώστε $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ και $\vec{z} = \text{vect}OD$. Θεωρούμε το επίπεδο Π το οποίο περνάει από το

σημείο D και είναι παράλληλο προς το επίπεδο που ορίζουν τα (μη συγγραμμικά) διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$. Αφού τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, ο φορέας του $\vec{OC}$ (δηλαδή η ευθεία OC) τέμνει το Π σε ένα σημείο C' . Ορίζουμε τον πραγματικό αριθμό c από τη σχέση $\vec{OC'} = c\vec{OC}$.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζουμε τα σημεία A' και B' πάνω στις ευθείες OA και OB αντίστοιχα, και τους πραγματικούς αριθμούς a και b έτσι ώστε $\vec{OA'} = a\vec{OA}$ και $\vec{OB'} = b\vec{OB}$.



Σχήμα 2.2: Ανάλυση διανύσματος σε τρεις συνιστώσες

Από την κατασκευή σχηματίζεται παραλληλεπίπεδο με ακμές OA', OB', OC' , και κορυφή D , Σχήμα 2.2.

Συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\vec{OD} &= \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} \\ &= a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}.\end{aligned}$$

□

Η πρόταση δείχνει ότι εάν $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

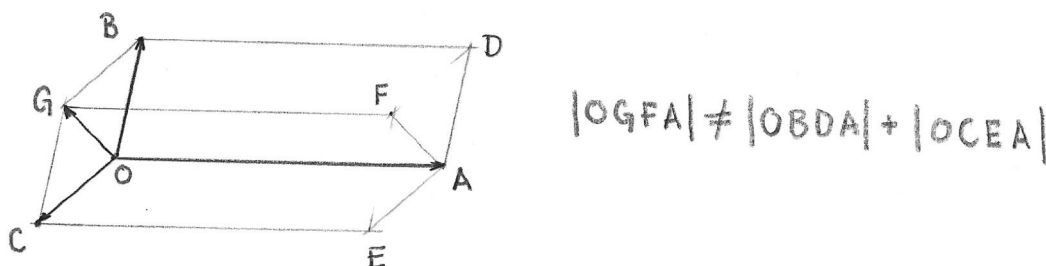
Συμπεραίνουμε ότι κάθε συλλογή που περιέχει περισσότερα από τρία διανύσματα στο χώρο, είναι γραμμικά εξαρτημένη. Παρατηρούμε ότι τρία διανύσματα τα οποία δεν εφάπτονται στο ίδιο επίπεδο είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στο χώρο

Όταν μελετάμε διανύσματα στο χώρο αποκτά ενδιαφέρον μία άλλη πράξη, την οποία θα ορίσουμε με γεωμετρικό τρόπο στη συνέχεια.

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{OA}$ και $\vec{v} = \vec{OB}$, και το παραλληλόγραμμο με πλευρές OA και OB , $OADB$, (Σχήμα 2.3). Το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου είναι ένας θετικός αριθμός, ο οποίος εξαρτάται από τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$, και τη γωνία μεταξύ τους. Μπορούμε να ορίσουμε μία πράξη η οποία, στο ζεύγος διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$ αντιστοιχεί

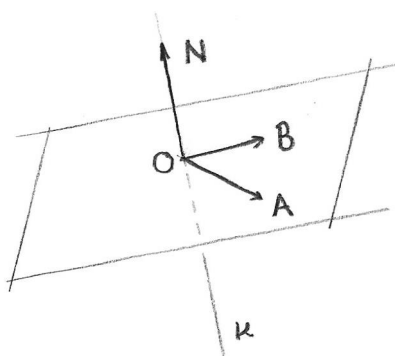
το εμβαδόν $|OADB|$ του παραλληλογράμμου $OADB$. Όμως είναι αρκετά εύκολο να δούμε ότι, ακόμα και στο επίπεδο, αυτή η πράξη δεν διαθέτει μία από τις βασικές ιδιότητες που θα θέλαμε, την επιμεριστικότητα ως προς την πρόσθεση.



Σχήμα 2.3: Το εμβαδόν παραλληλογράμμου δεν είναι επιμεριστικό

Εάν $\vec{OC}$ είναι ένα τρίτο διάνυσμα και $\vec{OG} = \vec{OB} + \vec{OC}$, η επιμεριστικότητα θα σήμαινε ότι το άθροισμα των εμβαδών των παραλληλογράμμων $OADB$ και $OAEC$ θα ήταν ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $OAFG$, $|OADB| + |OAEC| = |OAFG|$, πράγμα που εν γένει δεν ισχύει, Σχήμα 2.3.

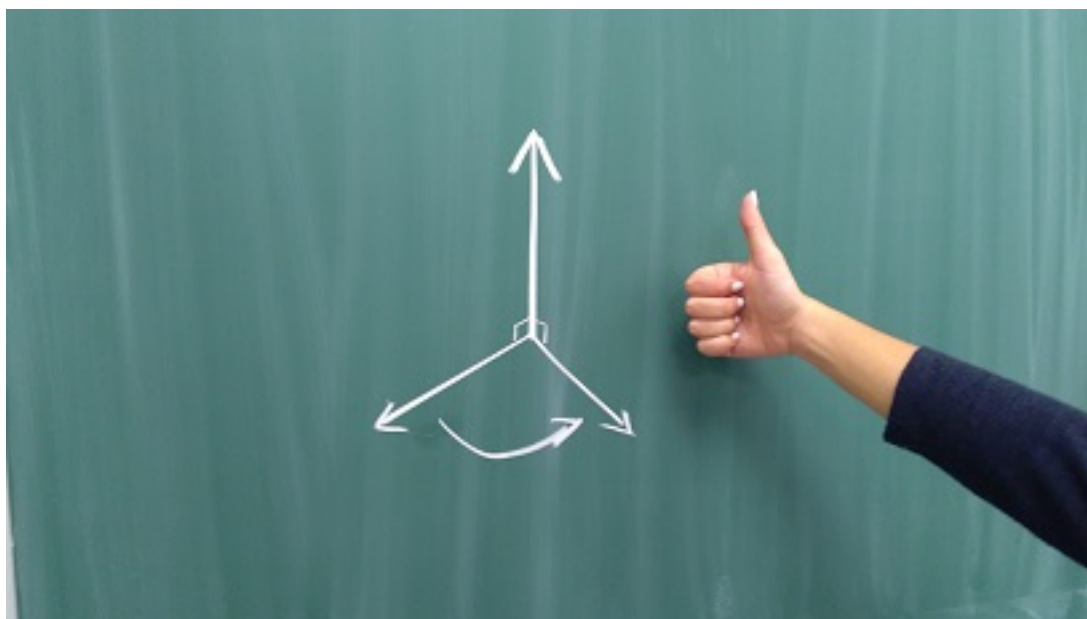
Για να ορίσουμε μία πράξη με χρήσιμες ιδιότητες πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας, εκτός από το εμβαδόν και τον προσανατολισμό του παραλληλογράμμου μέσα στο χώρο. Θεωρούμε ένα επίπεδο Π που περιέχει το σημείο αναφοράς O , και τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$.



Σχήμα 2.4: Προσανατολισμός επιπέδου από κάθετο διάνυσμα

Θεωρούμε την ευθεία κ η οποία περνάει από το O και είναι κάθετη στο επίπεδο Π . Αυτό σημαίνει ότι η κ είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του Π που περνάει από το O , ειδικότερα στους φορείς των $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$. Τα μη μηδενικά διανύσματα με φορέα την κ διακρίνονται σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με τη φορά τους.

Ορισμός 2.3. Εάν $\vec{ON}$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα με φορέα κ , ορίζουμε τον **προσανατολισμό** του επιπέδου Π που αντιστοιχεί στο $\vec{ON}$ να είναι η φορά περιστροφής του επιπέδου που προσδιορίζουν τα δάκτυλα του **δεξιού** χεριού, όταν ο αντίχειρας δείχνει στην κατεύθυνση του $\vec{ON}$, Σχήμα 2.4, Σχήμα 2.5.



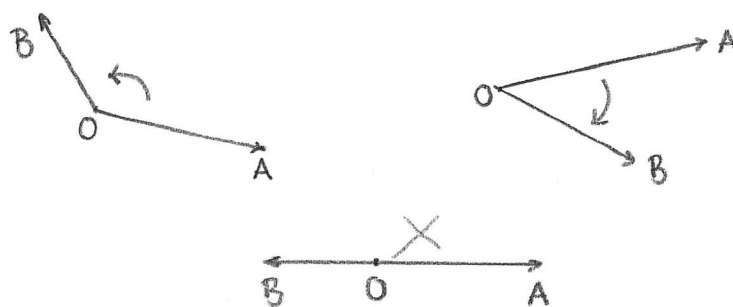
Σχήμα 2.5: Ο κανόνας του δεξιού χεριού

Είναι φανερό ότι ο προσανατολισμός του επιπέδου Π που αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε διάνυσμα ομόρροπο με το $\vec{ON}$ είναι ο ίδιος με αυτόν που αντιστοιχεί στο $\vec{ON}$, ενώ ο προσανατολισμός που αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα αντίρροπο προς το $\vec{ON}$ είναι αντίθετος.

Παρατηρούμε ότι μία διάταξη στο ζεύγος μη συγγραμμικών διανυσμάτων $(\vec{OA}, \vec{OB})$ επίσης προσδιορίζει ένα προσανατολισμό στο επίπεδο Π : τη φορά περιστροφής του επιπέδου η οποία μεταφέρει το διάνυσμα $\vec{OA}$ σε ένα διάνυσμα ομόρροπο με το $\vec{OB}$, μετά από στροφή κατά κυρτή γωνία ϑ , με $0 < \vartheta < \pi$, Σχήμα 2.6.

Η αντίθετη διάταξη των διανυσμάτων, $(\vec{OB}, \vec{OA})$, προσδιορίζει τον αντίθετο προσανατολισμό.

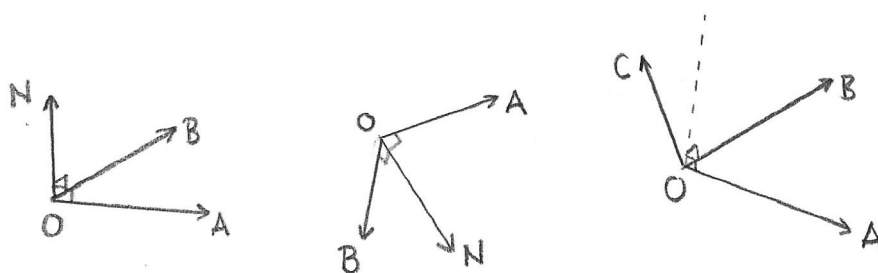
Με αυτόν τον τρόπο, στο διατεταγμένο ζεύγος διανυσμάτων $(\vec{OA}, \vec{OB})$ αντιστοιχεί μία φορά πάνω στην κάθετο κ : η φορά των διανυσμάτων που αντιστοιχούν στον προσανατολισμό του επιπέδου που προσδιορίζει το διατεταγμένο ζεύγος $(\vec{OA}, \vec{OB})$.



Σχήμα 2.6: Προσδιορισμός προσανατολισμού επιπέδου από διατεταγμένο ζεύγος διανυσμάτων

Ορισμός 2.4. Όταν ο προσανατολισμός του επιπέδου Π που προσδιορίζει το διατεταγμένο ζεύγος $(\vec{OA}, \vec{OB})$ συμπίπτει με τον προσανατολισμό που προσδιορίζει το κάθετο στο επίπεδο διάνυσμα $\vec{ON}$, λέμε ότι η διατεταγμένη τριάδα $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{ON})$ αποτελεί ένα **δεξιόστροφο σύστημα**, Σχήμα 2.7.

Γενικότερα, θεωρούμε τρία διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O , τα οποία δεν περιέχονται στο ίδιο επίπεδο, $\vec{u} = \vec{OA}$, $\vec{v} = \vec{OB}$ και $\vec{w} = \vec{OC}$. Η διατεταγμένη τριάδα $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ αποτελεί ένα **δεξιόστροφο σύστημα** εάν το πέρας C του διανύσματος $\vec{w}$ βρίσκεται στον ίδιο ημιχώρο του επιπέδου O, A, B με το κάθετο διάνυσμα $\vec{ON}$ που προσδιορίζει τον ίδιο προσανατολισμό με το διατεταγμένο ζεύγος $(\vec{u}, \vec{v})$.



Σχήμα 2.7: Δεξιόστροφα συστήματα διανυσμάτων

Δραστηριότητα 2.3 Με τρία μολύβια (ή τρία καλαμάκια, ή τρία σπέρτα) ελέγξτε ότι εάν η τριάδα $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα, το ίδιο ισχύει και για την τριάδα $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$, αλλά όχι για την τριάδα $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε μία νέα πράξη μεταξύ δύο διανυσμάτων στο χώρο, η οποία σχετίζεται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα δύο διανύσματα, αλλά έχει την επιμεριστική ιδιότητα.

Ορισμός 2.5. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{OX}$ το οποίο έχει φορέα τον κ , φορά αυτήν που προσδιορίζεται από τη διάταξη $(\vec{OA}, \vec{OB})$, και μέτρο ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με ακμές OA, OB . Ορίζουμε το **εξωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $\vec{OA}, \vec{OB}$ να είναι το διάνυσμα

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{cases} \vec{OX} & \text{εάν τα } \vec{OA}, \vec{OB} \text{ είναι συγγραμμικά} \\ \vec{OX} & \text{εάν τα } \vec{OA}, \vec{OB} \text{ δεν είναι συγγραμμικά.} \end{cases}$$

Η παράλληλη μεταφορά διανυσμάτων είναι συμβατή με την πράξη του εξωτερικού γινομένου. Εάν $\vec{OC} = \vec{OA} \times \vec{OB}$, ορίζουμε το εξωτερικό γινόμενο των ελεύθερων διανυσμάτων $[\vec{OA}]$ και $[\vec{OB}]$

$$\begin{aligned} [\vec{OA}] \times [\vec{OB}] &= [\vec{OA} \times \vec{OB}] \\ &= [\vec{OC}]. \end{aligned}$$

Εάν $\vec{u} \sim \vec{OA}$, $\vec{v} \sim \vec{OB}$ και $\vec{w} \sim \vec{OC}$, τότε έχουμε την ισότητα ελεύθερων διανυσμάτων

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}.$$

Το εξωτερικό γινόμενο ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.

Πρόταση 2.2 Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ και το αριθμό a : Τότε

$$\alpha'. \quad \vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$$

$$\beta'. \quad (a\vec{x}) \times \vec{y} = a(\vec{x} \times \vec{y})$$

$$\gamma'. \quad \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) + (\vec{x} \times \vec{z})$$

Απόδειξη. Τα 1 και 2 αποδεικνύονται εύκολα από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου. Το 3 θα αποδειχθεί όταν ορίσουμε το μικτό γινόμενο, στη σελίδα 63.

□

Διάλεξη 6

Σύστημα αναφοράς στο χώρο

Στο χώρο E^3 θεωρούμε ένα σημείο O , και τρία διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O , τα οποία δεν περιέχονται στο ίδιο επίπεδο, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ προσδιορίζουν τρεις άξονες, $(\varepsilon, \vec{u})$, $(\delta, \vec{v})$, $(\zeta, \vec{w})$, οι οποίοι τέμνονται στο O . Η διατεταγμένη τριάδα αξόνων $(\varepsilon, \vec{u})$, $(\delta, \vec{v})$, $(\zeta, \vec{w})$ ονομάζεται **σύστημα αναφοράς** στο χώρο και θα το συμβολίζουμε $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Από την Πρόταση 2.1, οποιοδήποτε διάνυσμα στο χώρο $\vec{z}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}.$$

Ορισμός 2.6. Οι αριθμοί της διατεταγμένης τριάδας (a, b, c) ονομάζονται **συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{z}$** ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Τα διανύσματα $a\vec{u}$, $b\vec{v}$, $c\vec{w}$ ονομάζονται **συνιστώσες του $\vec{z}$** ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Για κάθε σημείο D του χώρου, το διάνυσμα $\overrightarrow{OD}$ ονομάζεται **διάνυσμα θέσης** (ή **διανυσματική ακτίνα**) του D , και οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{OD}$ είναι οι **συντεταγμένες του σημείου D** .

Δραστηριότητα 2.4 Σχεδιάστε ένα κανονικό τετράεδρο $OABC$, με πλευρά μήκους 1, τα διανύσματα $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ και $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$, και θεωρήστε το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Σχεδιάστε το διάνυσμα $\vec{u}$ με συντεταγμένες $(1, 1, 1)$ και το διάνυσμα $\vec{w}$ με συντεταγμένες $(1, 1, -1)$.

Θα περιορίσουμε την προσοχή μας σε **ορθοκανονικά, δεξιόστροφα** συστήματα συντεταγμένων.

Ορισμός 2.7. Ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο τα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ έχουν μέτρο 1, είναι κάθετα μεταξύ τους, και η διατεταγμένη τριάδα $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ αποτελεί δεξιόστροφο σύστημα διανυσμάτων.

Δραστηριότητα 2.5 Σχεδιάστε ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Συνήθως σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{j}$ και $\vec{k}$ στο επίπεδο του χαρτιού, και φανταζόμαστε το διάνυσμα $\vec{i}$ να βγαίνει έξω από το χαρτί. Σημειώστε το σημείο με συντεταγμένες $(1, 2, 1)$ και το διάνυσμα με συντεταγμένες $(0, -2, 1)$.

Πρόταση 2.3 Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{z}$ δίδονται από τα εσωτερικά γινόμενα του $\vec{z}$ με τα διανύσματα του συστήματος:

$$\vec{z} = (\vec{z} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{z} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{z} \cdot \vec{k})\vec{k}.$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων δίδεται από το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων συντεταγμένων. Εάν $\vec{z} = z_1\vec{i} + z_2\vec{j} + z_3\vec{k}$ και $\vec{y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$, τότε

$$\vec{z} \cdot \vec{y} = z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3$$

και

$$|\vec{z}| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}.$$

Δραστηριότητα 2.6 Οι συντεταγμένες δίδονται ως προς ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Εάν $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{w} = (-1, 1, -2)$, $A : (3, 4, -5)$ και $B : (2, 1, -2)$, υπολογίστε

α'. Τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{u} \cdot \vec{w}$ και $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

β'. Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{w}$.

γ'. Την απόσταση του σημείου A από το σημείο B .

δ'. Τις συντεταγμένες του μέσου M του διαστήματος AB , και την απόσταση του M από το σημείο αναφοράς O .

Θα υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων ως προς ένα ορθοκανονικό, δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς.

Πρόταση 2.4 Εάν τα διανύσματα $\vec{z}$ και $\vec{y}$ έχουν συντεταγμένες (z_1, z_2, z_3) και (y_1, y_2, y_3) αντίστοιχα, ως προς ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, τότε

$$\vec{z} \times \vec{y} = (z_2y_3 - z_3y_2)\vec{i} + (z_3y_1 - z_1y_3)\vec{j} + (z_1y_2 - z_2y_1)\vec{k}. \quad (2.1)$$

Απόδειξη. Εάν $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ είναι ορθοκανονικό και δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς, το παραλληλόγραμμο που προσδιορίζουν τα $\vec{i}, \vec{j}$ είναι ορθογώνιο, με εμβαδόν 1, και ισχύει η σχέση

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = -\vec{j} \times \vec{i}$$

Ανάλογα έχουμε

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} = -\vec{k} \times \vec{j}$$

και

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} = -\vec{i} \times \vec{k}.$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου, την οποία

θα αποδείξουμε στην Πρόταση 2.7 χωρίς τη χρήση συντεταγμένων, έχουμε

$$\begin{aligned}
 \vec{z} \times \vec{y} &= (z_1 \vec{i} + z_2 \vec{j} + z_3 \vec{k}) \times (y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j} + y_3 \vec{k}) \\
 &= z_1 y_1 \vec{i} \times \vec{i} + z_1 y_2 \vec{i} \times \vec{j} + z_1 y_3 \vec{i} \times \vec{k} \\
 &\quad + z_2 y_1 \vec{j} \times \vec{i} + z_2 y_2 \vec{j} \times \vec{j} + z_2 y_3 \vec{j} \times \vec{k} \\
 &\quad + z_3 y_1 \vec{k} \times \vec{i} + z_3 y_2 \vec{k} \times \vec{j} + z_3 y_3 \vec{k} \times \vec{k} \\
 &= z_1 y_1 \vec{0} + z_1 y_2 \vec{k} - z_1 y_3 \vec{j} \\
 &\quad - z_2 y_1 \vec{k} + z_2 y_2 \vec{0} + z_2 y_3 \vec{i} \\
 &\quad + z_3 y_1 \vec{j} - z_3 y_2 \vec{i} + z_3 y_3 \vec{0},
 \end{aligned}$$

όπου συμβολίζουμε $\vec{0}$ το μηδενικό διάνυσμα. Καταλήγουμε στην

$$\vec{z} \times \vec{y} = (z_2 y_3 - z_3 y_2) \vec{i} + (z_3 y_1 - z_1 y_3) \vec{j} + (z_1 y_2 - z_2 y_1) \vec{k}.$$

□

Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του εξωτερικού γινομένου, διευκολύνει ο συμβολισμός των 3×3 ορίζουσών: Εάν $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ και c_1, c_2, c_3 είναι 9 ποσότητες, για τις οποίες ορίζονται πράξεις πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1. \quad (2.2)$$

Τις ορίζουσες θα μελετήσουμε διεξοδικά στη Γραμμική Άλγεβρα. Ειδικά για να υπολογίσουμε 3×3 ορίζουσες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο σχήμα: Ξαναγράφουμε τις δύο πρώτες γραμμές ως τέταρτη και πέμπτη γραμμή, και υπολογίζουμε τα αθροίσματα των γινομένων κατά μήκος των διαγωνίων, με $+$ για τις διαγώνιες από τα αριστερά προς τα δεξιά, και με $-$ για τις διαγώνιες από τα δεξιά προς τα αριστερά

$$\begin{array}{ccc}
 + & & - \\
 a_1 & a_2 & a_3 \\
 + & \searrow & \swarrow - \\
 b_1 & b_2 & b_3 \\
 + & \swarrow \searrow & \swarrow \searrow - \\
 c_1 & c_2 & c_3 \\
 & \swarrow \searrow & \swarrow \searrow \\
 a_1 & a_2 & a_3 \\
 & \swarrow \searrow & \swarrow \searrow \\
 b_1 & b_2 & b_3
 \end{array} = +a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1.$$

Στην περίπτωση του εξωτερικού γινομένου $\vec{z} \times \vec{y}$, υπολογίζουμε την ορίζουσα με πρώτη γραμμή τα διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, και τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{z}$ και $\vec{y}$ στη δεύτερη και

την τρίτη γραμμή αντίστοιχα. Κάθε όρος αυτής της ορίζουσας είναι ένα από τα διανύσματα του συστήματος αναφοράς πολλαπλασιασμένο με έναν αριθμό. Συγκρίνοντας την 2.1 με την 2.2, έχουμε

$$\vec{z} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Δραστηριότητα 2.7 Οι συντεταγμένες δίδονται ως προς ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Εάν $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{w} = (-1, 1, -2)$, $A : (3, 4, -5)$ και $B : (2, 1, -2)$, υπολογίστε

α'. Το εξωτερικό γινόμενο $\vec{u} \times \vec{w}$.

β'. Ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που περνάει από το σημείο αναφοράς και τα σημεία A και B .

γ'. Το εμβαδόν του τριγώνου OAB .

Μικτό γινόμενο

Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{x} = \vec{OA}$, $\vec{y} = \vec{OB}$ και $\vec{z} = \vec{OC}$ με κοινό σημείο εφαρμογής O που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, και εξετάζουμε το εσωτερικό γινόμενο του εξωτερικού γινομένου των $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ με το διάνυσμα $\vec{OC}$. Θα δούμε ότι $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}$ είναι ένας αριθμός του οποίου η απόλυτη τιμή είναι ίση με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$.

Πράγματι, το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}$ είναι

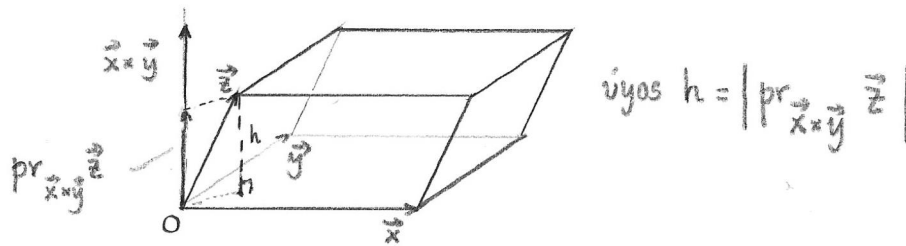
$$|\vec{OA} \times \vec{OB}| \left(\text{pr}_{\vec{OA} \times \vec{OB}} \vec{OC} \right).$$

Το διάνυσμα $\vec{OA} \times \vec{OB}$ έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\vec{OA}$, $\vec{OB}$. Το μέτρο της προβολής του $\vec{OC}$ στο διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο του παραλληλογράμμου $OADB$ είναι το ύψος του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$. Άρα η απόλυτη τιμή του εσωτερικού γινομένου,

$$|(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}| = |\vec{OA} \times \vec{OB}| \left| \text{pr}_{\vec{OA} \times \vec{OB}} \vec{OC} \right|,$$

είναι ακριβώς το εμβαδόν της βάσης του παραλληλεπιπέδου επί το ύψος του, δηλαδή ο όγκος του παραλληλεπιπέδου, Σχήμα 2.8.

Εάν η διατεταγμένη τριάδα $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα, τότε ο αριθμός $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$ είναι θετικός, δες Άσκηση 3.4, ενώ στην αντίθετη περίπτωση είναι αρνητικός.



Σχήμα 2.8: Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

Ορισμός 2.8. Το **μικτό γινόμενο** τριών διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ είναι ο αριθμός

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}.$$

Συγκεντρώνουμε τις προηγούμενες παρατηρήσεις σε μία Πρόταση.

Πρόταση 2.5 Εάν τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, η απόλυτη τιμή του μικτού γινομένου $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ είναι ίση με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

Το μικτό γινόμενο είναι θετικό εάν το σύστημα $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο και αρνητικό εάν το $(-\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο.

Το μικτό γινόμενο είναι μηδέν εάν και μόνον εάν τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ είναι συνεπίεδα.

Παρατηρούμε ότι η απόλυτη τιμή του γινομένου $(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x}$ είναι ίση με την απόλυτη τιμή του γινομένου $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$, αφού και οι δύο είναι ίσες με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{x}$. Στην Άσκηση 3.5 έχουμε δείξει ότι $(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα ακριβώς όταν $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα. Συμπεραίνουμε ότι τα μικτά γινόμενα $(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x}$ και $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$ έχουν το ίδιο πρόσημο. Καταλήγουμε ότι

$$(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x} = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}.$$

Συνδυάζοντας με την αντιμεταθετική ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου έχουμε επίσης

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}),$$

δηλαδή, στον ορισμό του μικτού γινομένου μπορούμε να εναλλάξουμε το εξωτερικό και το εσωτερικό γινόμενο. Συνοψίζουμε αυτές και άλλες ιδιότητες του μικτού γινομένου στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 2.6 Το μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ικανοποιεί τις ταυτότητες

$$\alpha'. [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}),$$

$$\beta'. [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = [\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}] = [\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}],$$

$$\gamma'. -[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = [\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}] = [\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}] = [\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}].$$

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε την επιμεριστική ιδιότητα για το εξωτερικό γινόμενο:

Πρόταση 2.7 Εάν $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι διανύσματα στο χώρο,

$$\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το διάνυσμα

$$\vec{b} = \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) - \vec{x} \times \vec{y} - \vec{x} \times \vec{z}.$$

Θα δείξουμε ότι $|\vec{b}| = 0$, και συνεπώς ότι $\vec{b} = 0$. Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα για το εσωτερικό γινόμενο και την Πρόταση 2.6.α' έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot (\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) - \vec{x} \times \vec{y} - \vec{x} \times \vec{z}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) - \vec{b} \cdot \vec{x} \times \vec{y} - \vec{b} \cdot \vec{x} \times \vec{z} \\ &= (\vec{b} \times \vec{x}) \cdot (\vec{y} + \vec{z}) - (\vec{b} \times \vec{x}) \cdot \vec{y} - (\vec{b} \times \vec{x}) \cdot \vec{z} \\ &= (\vec{b} \times \vec{x}) \cdot ((\vec{y} + \vec{z}) - \vec{y} - \vec{z}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Μπορούμε να υπολογίσουμε το μικτό γινόμενο χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ως προς ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς,

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) &= (x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) \cdot \\ &\quad \cdot [(y_2z_3 - y_3z_2)\vec{i} + (y_3z_1 - y_1z_3)\vec{j} + (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{k}] \\ &= x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + x_2y_3z_1 - x_2y_1z_3 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Δραστηριότητα 2.8 Οι συντεταγμένες δίδονται ως προς ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Εάν $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{w} = (-1, 1, -2)$, $A : (3, 4, -5)$ και $B : (2, 1, -2)$, υπολογίστε το μικτό γινόμενο $[\vec{u}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}]$.

Δις εξωτερικό γινόμενο

Το γινόμενο $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ είναι κάθετο προς το $\vec{y} \times \vec{z}$, και συνεπώς βρίσκεται στο επίπεδο των $\vec{y}, \vec{z}$. Ο ακόλουθος υπολογισμός εκφράζει το $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{y}$ και

$\vec{z}$.

$$\begin{aligned}
 \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_2 z_3 - y_3 z_2 & y_3 z_1 - y_1 z_3 & y_1 z_2 - y_2 z_1 \end{vmatrix} \\
 &= \vec{i}(x_2(y_1 z_2 - y_2 z_1) - x_3(y_3 z_1 - y_1 z_3)) \\
 &\quad + \vec{j}(x_3(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_1(y_1 z_2 - y_2 z_1)) \\
 &\quad + \vec{k}(x_1(y_3 z_1 - y_1 z_3) - x_2(y_2 z_3 - y_3 z_2)) \\
 &= \vec{i}(y_1(x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) - z_1(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)) \\
 &\quad + \vec{j}(y_2(x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) - z_2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)) \\
 &\quad + \vec{k}(y_3(x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) - z_3(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)) \\
 &= (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}.
 \end{aligned}$$

Πρόταση 2.8 Εάν $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι διανύσματα στο χώρο E^3 , το δις εξωτερικό γινόμενο δίδεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
 \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) &= (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}, \\
 (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} &= (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}.
 \end{aligned}$$

Επίπεδα στο χώρο

Στο χώρο E^3 επιλέγουμε ένα δεξιόστροφο, ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Ένα επίπεδο στο χώρο E^3 προσδιορίζεται εάν γνωρίζουμε 3 σημεία του που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ή εάν γνωρίζουμε ένα σημείο του επιπέδου και ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο.

Παράδειγμα 2.1 Θεωρούμε τα σημεία $P : (1, 0, 1)$, $Q : (1, 1, 0)$, $R : (0, 1, 1)$. Εάν $X : (x, y, z)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου που περνάει από τα τρία σημεία, υπάρχουν αριθμοί s και t τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{PX} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR}$. Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων

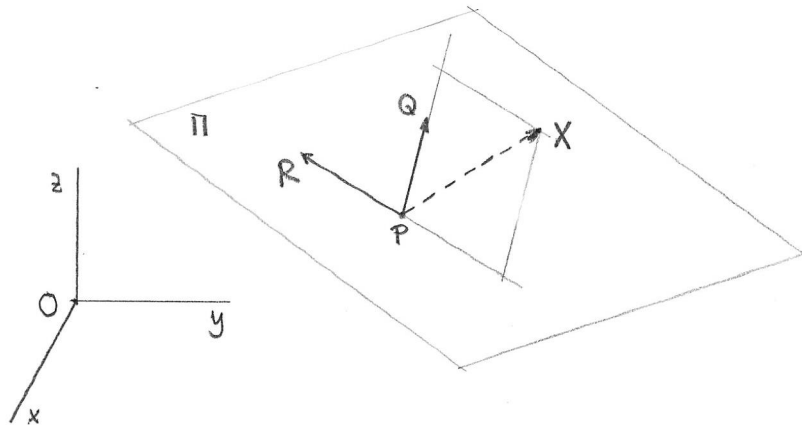
$$\overrightarrow{PX} = (x - 1, y, z - 1), \quad \overrightarrow{PQ} = (0, 1, -1), \quad \overrightarrow{PR} = (-1, 1, 0),$$

και βρίσκουμε τις παραμετρικές εξισώσεις για τις συντεταγμένες του σημείου X ,

$$x = 1 - t, \quad y = s + t, \quad z = 1 - s.$$

Αντικαθιστώντας τα $t = 1 - x$ και $s = 1 - z$ στην $y = s + t$ έχουμε την αναλυτική εξίσωση του επιπέδου

$$x + y + z = 2.$$

Σχήμα 2.9: Το επίπεδο που προσδιορίζεται από τα σημεία P , Q και R .

Γενικά, θεωρούμε τρία σημεία $P : (x_1, y_1, z_1)$, $Q : (x_2, y_2, z_2)$ και $R(x_3, y_3, z_3)$ που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$ δεν είναι συγγραμμικά. Εάν $X : (x, y, z)$ είναι το γενικό σημείο του επιπέδου Π που περνάει από τα τρία σημεία, τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ γράφεται ως γραμμικός σύνδυασμος των $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$. Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί s και t τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\overrightarrow{PX} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR}. \quad (2.3)$$

Έτσι βρίσκουμε την παραμετρική περιγραφή για το διάνυσμα θέσης του γενικού σημείου X του επιπέδου:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR},$$

και αφού $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$

$$\overrightarrow{OX} = (1 - s - t)\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OQ} + t\overrightarrow{OR}.$$

Δραστηριότητα 2.9 Γράψτε τις προηγούμενες σχέσεις σε συντεταγμένες.

Από την εξίσωση 2.3 έχουμε τρεις παραμετρικές εξισώσεις για τις συντεταγμένες του X :

$$x - x_1 = s(x_2 - x_1) + t(x_3 - x_1),$$

$$y - y_1 = s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1),$$

$$z - z_1 = s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1).$$

Από αυτές τις εξισώσεις μπορούμε να απαλείψουμε τα s και t , για να βρούμε την εξίσωση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες (x, y, z) του γενικού σημείου του επιπέδου Π . Αφού $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$ δεν είναι συγγραμμικά, τουλάχιστον ένα από τα $x_3 - x_1$, $y_3 - y_1$, $z_3 - z_1$ δεν είναι μηδέν. Εάν $x_3 - x_1 \neq 0$, επιλέγουμε την πρώτη εξίσωση και λύνουμε ως προς t ,

$$t = \frac{(x - x_1) - s(x_2 - x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Επίσης, αφού $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$ δεν είναι συγγραμμικά, οι λόγοι $(x_2 - x_1) : (x_3 - x_1)$, $(y_2 - y_1) : (y_3 - y_1)$ και $(z_2 - z_1) : (z_3 - z_1)$ δεν είναι όλοι ίσοι. Συνεπώς τουλάχιστον ένα από τα $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$ και $(x_2 - x_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(x_3 - x_1)$ δεν είναι μηδέν. Εάν $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) \neq (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$, αντικαθιστούμε το t στην εξίσωση $y - y_1 = s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1)$ και λύνουμε ως προς s ,

$$s = \frac{(x - x_1)(y_3 - y_1) - (y - y_1)(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}.$$

Αντικαθιστούμε το t και μετά το x στην $z - z_1 = s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1)$ και έχουμε

$$\begin{aligned} z - z_1 &= \frac{(z_2 - z_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(z_3 - z_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}(x - x_1) + \\ &+ \frac{(x_2 - x_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}(y - y_1). \end{aligned}$$

Για να γράψουμε την εξίσωση σε πιο σύντομη μορφή, θέτουμε

$$\begin{aligned} A &= (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1) \\ B &= (z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1) \\ C &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \end{aligned}$$

και τελικά έχουμε την εξίσωση

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \quad (2.4)$$

Δραστηριότητα 2.10 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $P : (1, 1, 1)$, $Q : (2, 1, 2)$ και $R : (0, 2, 1)$.

Ένας συντομότερος τρόπος να βρούμε την αναλυτική εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία P , Q και R βασίζεται στο εξωτερικό γινόμενο: Τα διανύσματα $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$ βρίσκονται στο επίπεδο Π , άρα το εξωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο Π . Το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$, που εφάπτεται στο επίπεδο, είναι κάθετο στο εξωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. Συνεπώς το μικτό γινόμενο μηδενίζεται,

$$\overrightarrow{PX} \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) = 0.$$

Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

και καταλήγουμε πάλι στην εξίσωση 2.4.

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Δραστηριότητα 2.11 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $P : (1, 1, 1)$, $Q : (2, 1, 2)$ και $R : (0, 2, 1)$ χρησιμοποιώντας το εξωτερικό γινόμενο $\vec{PQ} \times \vec{PR}$.

Εάν στην εξίσωση 2.4 θέσουμε $D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$, έχουμε μια εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2.5)$$

Ο άλλος τρόπος να προσδιορίσουμε ένα επίπεδο στο χώρο είναι να γνωρίζουμε ένα σημείο του επιπέδου, $P(x_1, y_1, z_1)$ και ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο, $\vec{n}$ με συντεταγμένες (k, ℓ, m) . τότε εάν $X(x, y, z)$ είναι τυχόν σημείο του επιπέδου, το διάνυσμα $\vec{PX}$ είναι κάθετο στο $\vec{n}$ και συνεπώς

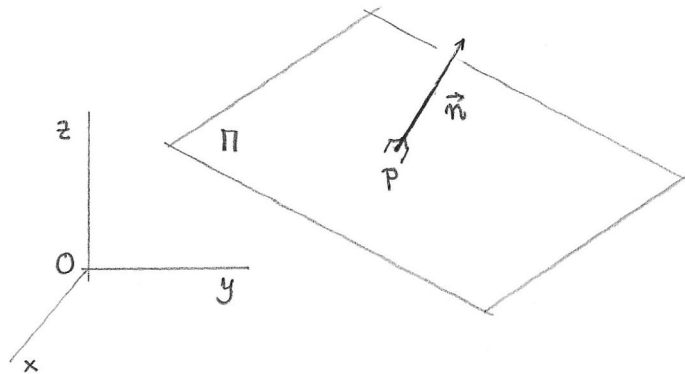
$$\vec{PX} \cdot \vec{n} = 0,$$

ή

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot (k, \ell, m) = 0,$$

δηλαδή

$$kx + \ell y + mz - (kx_1 + \ell y_1 + mz_1) = 0.$$



Σχήμα 2.10: Το επίπεδο που περνάει από το σημείο P , και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n}$.

Βλέπουμε ότι και σε αυτή την περίπτωση η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου είναι της μορφής 2.5. Θα δείξουμε ότι αυτή είναι η γενική εξίσωση επιπέδου.

Πρόταση 2.9 Ο γεωμετρικός τόπος μίας εξίσωσης της μορφής

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

όπου τα A, B, C δεν είναι και τα τρία μηδέν, είναι ένα επίπεδο στο χώρο E^3 .

Απόδειξη. Εάν (x_1, y_1, z_1) είναι ένα σημείο που ικανοποιεί την εξίσωση

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

τότε για κάθε άλλο σημείο (x, y, z) που την ικανοποιεί έχουμε

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

δηλαδή το διάνυσμα $(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ είναι κάθετο στο (A, B, C) . Συνεπώς το σημείο με συντεταγμένες (x, y, z) βρίσκεται στο επίπεδο που περνάει από το (x_1, y_1, z_1) και είναι κάθετο στο διάνυσμα (A, B, C) εάν και μόνο εάν $Ax + By + Cz + D = 0$. □

Από τις τιμές των συντελεστών A, B, C, D προσδιορίζουμε τη θέση του επιπέδου σε σχέση με τους άξονες του συστήματος αναφοράς.

- Εάν $B = C = 0$ και $A \neq 0$, τότε η εξίσωση γίνεται

$$x = -\frac{D}{A}$$

και παριστάνει ένα επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο Oyz .

- Εάν $A = 0, BC \neq 0$, τότε η εξίσωση γίνεται

$$By + Cz + D = 0$$

και παριστάνει το επίπεδο που είναι παράλληλο στο άξονα Ox και τέμνει το επίπεδο Oyz στην ευθεία με εξίσωση $By + Cz + D = 0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

- Εάν $D = 0$, τότε η εξίσωση

$$Ax + By + Cz = 0$$

παριστάνει επίπεδο που περνάει από το σημείο αναφοράς O .

- Εάν $ABCD \neq 0$, τότε το επίπεδο τέμνει τους άξονες Ox, Oy, Oz σε τρία σημεία, $(-\frac{D}{A}, 0, 0), (0, -\frac{D}{B}, 0), (0, 0, -\frac{D}{C})$ αντίστοιχα.

Αντίστροφα, το επίπεδο που τέμνει τους άξονες Ox, Oy, Oz στα α, β, γ αντίστοιχα, με $\alpha\beta\gamma \neq 0$, έχει εξίσωση

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1.$$

Απόσταση σημείου από επίπεδο

Θεωρούμε ένα επίπεδο Π και ένα σημείο X_1 στο E^3 . Θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου X_1 από το επίπεδο Π .

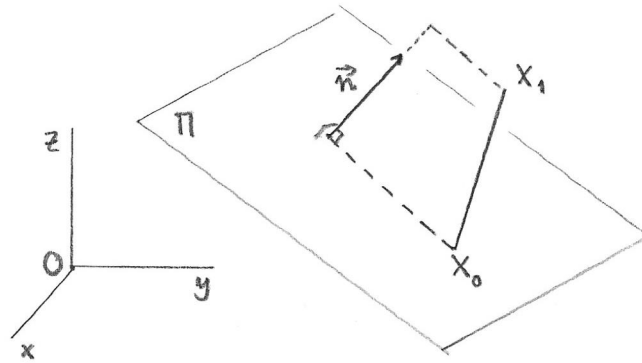
Έστω ότι η εξίσωση του επιπέδου Π είναι $Ax + By + Cz + D = 0$, και $\vec{n} = (A, B, C)$ είναι ένα κάθετο διάνυσμα στο Π . Εάν $X_0 : (x_0, y_0, z_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου Π , και

$X_1 : (x_1, y_1, z_1)$ σημείο του χώρου E^3 , η προσημασμένη απόσταση του X_1 από το επίπεδο Π είναι το προσημασμένο μέτρο της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{X_0 X_1}$ στο $\vec{n}$, Σχήμα 2.11.

$$\begin{aligned} d(X_1, \Pi) &= (\text{pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{X_0 X_1}) = \frac{\overrightarrow{X_0 X_1} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{(x_1 - x_0)A + (y_1 - y_0)B + (z_1 - z_0)C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned}$$

αλλά $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$, άρα

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.6)$$



Σχήμα 2.11: Η απόσταση σημείου από επίπεδο.

Η απόσταση d είναι θετική εάν το X_1 βρίσκεται στον ημίχωρο προς τον οποίο κατευθύνεται το διάνυσμα $\vec{n} = (A, B, C)$, και αρνητική στην αντίθετη περίπτωση.

Δραστηριότητα 2.12 Υπολογίστε την απόσταση του σημείου με συντεταγμένες $(1, 1, 2)$ από το επίπεδο με εξίσωση $x + y - z = 1$.

Ασκήσεις 3

Άσκηση 3.1 Σχεδιάστε τρία διανύσματα $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$ που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Συμπληρώστε στο σχέδιο το παραλληλεπίπεδο που κατασκευάζεται με ακμές AB , AC και AD (προσέξτε να μην δείχνει ορθογώνιο) έτσι ώστε AA' , BB' , CC' και DD' να είναι οι διαγώνιοι του παραλληλεπιπέδου.

Εκφράστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{AD'}$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{x}$, $\vec{y}$ και $\vec{z}$.

Άσκηση 3.2 Σχεδιάστε ένα τετράεδρο $ABCD$, με $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$.

α'. Σημειώστε στο σχήμα το σημείο M που είναι το μέσο της ακμής CD και το σημείο P που είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου BCD . Δείξτε ότι $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.

β'. Έστω Q το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου ABD . Εκφράστε το $\overrightarrow{CQ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{x}$, $\vec{y}$ και $\vec{z}$.

γ'. Δείξτε ότι AP και CQ τέμνονται σε ένα σημείο S τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{4}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.

δ'. Υπολογίστε τον απλό λόγο (APS) .

ε'. Αποδείξτε ότι οι τέσσερις ευθείες που ενώνουν κάθε κορυφή ενός τετραέδρου με το κέντρο βάρους της απέναντι τριγωνικής πλευράς τέμνονται σε ένα σημείο.

Άσκηση 3.3 Σχεδιάστε ένα κανονικό τετράεδρο $ABCD$ με μήκος πλευράς 1, και θεωρήστε τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Ποιές από τις ακόλουθες τριάδες είναι δεξιόστροφες, και ποιές δεν είναι;

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}), \quad (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}), \quad (\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}), \quad (\vec{w}, -\vec{v}, \vec{u}).$$

Άσκηση 3.4 Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ με κοινό σημείο εφαρμογής O . Δείξτε ότι $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα εάν και μόνον εάν $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} > 0$.

Άσκηση 3.5 Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ με κοινό σημείο εφαρμογής O . Δείξτε ότι εάν $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα τότε το ίδιο ισχύει για τις διατεταγμένες τριάδες $(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x})$, $(\vec{z}, \vec{x}, \vec{y})$ και $(\vec{y}, \vec{x}, -\vec{z})$.

Άσκηση 3.6 Δείξτε ότι

$$[\vec{x} \vec{y} \vec{z}] = [\vec{y} \vec{z} \vec{x}] = [\vec{z} \vec{x} \vec{y}],$$

$$[\vec{z} \vec{y} \vec{x}] = [\vec{y} \vec{x} \vec{z}] = [\vec{x} \vec{z} \vec{y}].$$

Άσκηση 3.7 Εάν $\vec{a} \neq 0$ και $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{a}) \times \vec{b}$, τί συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για το $\vec{b}$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 3.8 Δίνεται ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ στο χώρο. Αποδείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Υπόδειξη: Εάν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε μπορούμε να βρούμε αριθμούς r, s, t που να μην είναι όλοι μηδέν, τέτοιους ώστε $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{0}$.

Άσκηση 3.9 Υπολογίστε το εξωτερικό γινόμενο $\vec{v} \times \vec{u}$ των διανυσμάτων (με συντεταγμένες ως προς ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς) $\vec{v} = (1, 2, 1)$, $\vec{u} = (3, 1, 2)$.

Εξετάστε αν τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{u}$ και $\vec{w} = (4, 5, 0)$ είναι συνεπίπεδα.

Άσκηση 3.10 Υπολογίστε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $ABCD$ όπου $A : (0, 1, 1)$, $B : (2, 1, 0)$ και $C : (1, 1, 2)$.

Υπολογίστε το εμβαδόν των άλλων δύο παραλληλογράμμων που έχουν ως τρεις από τις κορυφές τους τα σημεία A, B, C . Τι παρατηρείτε; Πως εξηγείται αυτό;

Άσκηση 3.11 Για την πράξη του πολλαπλασιασμού αριθμών, γνωρίζουμε ότι εάν $x \neq 0$ τότε

$$xy = xz \Rightarrow y = z$$

Ισχύει το ανάλογο αποτέλεσμα για την πράξη του εξωτερικού γινομένου; Με άλλα λόγια, ισχύει ότι, αν $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι τυχαία διανύσματα στο χώρο με $\vec{x} \neq \vec{0}$, τότε

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times \vec{z} \Rightarrow \vec{y} = \vec{z};$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε την εξίσωση $\vec{x} \times (\vec{y} - \vec{z}) = \vec{0}$.

Άσκηση 3.12 Έστω ορθοκανονικό σύστημα του χώρου $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Να βρεθεί ένα άλλο σύστημα του χώρου $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, με $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, τέτοιο ώστε τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ να είναι ορθογώνια ανά δύο.

Άσκηση 3.13 Για το εξωτερικό γινόμενο δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα: $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ δεν είναι πάντα ίσο με $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$. Υπάρχει όμως μία άλλη σχέση, η **ταυτότητα Jacobi**.

Δείξτε ότι, για τυχαία διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ στο χώρο,

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) = \vec{0}.$$

Για τις επόμενες 3 ερωτήσεις, δίδονται τα σημεία $P : (2, 3, 1)$, $Q : (3, 1, 4)$ και $R : (2, 1, 5)$.

Άσκηση 3.14 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία P, Q, R .

Άσκηση 3.15 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το σημείο P και είναι κάθετο στην ευθεία QR . Είναι το επίπεδο παράλληλο προς κάποιον άξονα συντεταγμένων;

Άσκηση 3.16 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου Π_s που περιέχει την ευθεία QR και τέμνει τον άξονα Oy στο σημείο $(0, s, 0)$, για $s \in \mathbb{R}$,

Άσκηση 3.17 Έστω Π το επίπεδο με παραμετρική περιγραφή

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + s(1, 2, 3) + t(1, 1, 1).$$

Βρείτε την εξίσωση του Π , με δύο τρόπους:

α'. απαλείφοντας πρώτα την παράμετρο t και κατόπιν την παράμετρο s .

β'. χρησιμοποιώντας το εξωτερικό γινόμενο.

Ελέγξτε ότι οι δύο διαδικασίες καταλήγουν σε ισοδύναμες εξισώσεις.

Άσκηση 3.18 Θεωρούμε το επίπεδο Π στο E^3 που περνάει από τα σημεία $Q : (2, 1, 3)$, $R : (2, 4, 0)$ και $S : (-3, 0, 4)$. Στο επίπεδο Π ορίζουμε το (μη ορθοκανονικό) σύστημα αναφοράς $(Q, \vec{v}, \vec{w})$, όπου $\vec{v} = \overrightarrow{QR}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{QS}$. Να βρείτε:

α'. Τις συντεταγμένες στο E^3 του σημείου του Π που έχει συντεταγμένες $(5, 3)$ ως προς το $(Q, \vec{v}, \vec{w})$.

β'. Τις συντεταγμένες ως προς το $(Q, \vec{v}, \vec{w})$ του σημείου στο οποίο το επίπεδο Π τέμνει τον άξονα Oz .

Διάλεξη 7

Παραμετρική και αναλυτική περιγραφή ευθείας στο χώρο

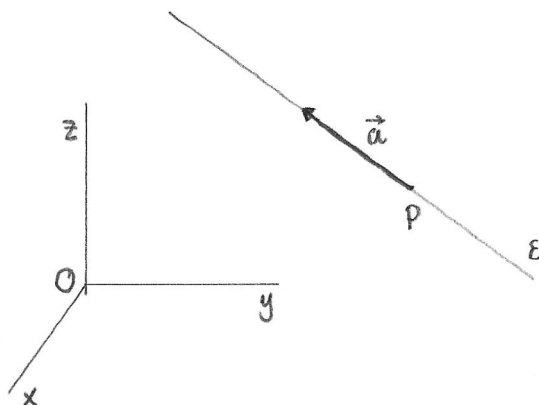
Μία ευθεία ε στο χώρο E^3 προσδιορίζεται αναλυτικά από δύο εξισώσεις, ως η τομή δύο επιπέδων. Εναλλακτικά, μπορούμε να προσδιορίσουμε παραμετρικά μία ευθεία στο χώρο E^3 εάν γνωρίζουμε δύο σημεία P και Q πάνω στην ε , ή ένα σημείο P πάνω στην ε και ένα μη μηδενικό διάνυσμα παράλληλο προς την ε .

Θεωρούμε ένα σημείο $P : (x_1, y_1, z_1)$, και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a} = (u, v, w)$. Εάν X είναι το γενικό σημείο στην ευθεία που περνάει από το P και έχει διεύθυνση παράλληλη προς το $\vec{a}$, τότε $\overrightarrow{PX} = s\vec{a}$ και η παραμετρική περιγραφή του διανύσματος θέσης του X είναι

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s\vec{a}. \quad (2.7)$$

Από την 2.7 έχουμε τρεις παραμετρικές σχέσεις για τις συντεταγμένες του X ,

$$x = x_1 + su, \quad y = y_1 + sv, \quad z = z_1 + sw.$$



Σχήμα 2.12: Η ευθεία στο χώρο.

Αφού $\vec{a} \neq 0$, τουλάχιστον ένα από τα u, v, w δεν είναι μηδέν. Σε κάθε περίπτωση απαλείφοντας το s από τις τρεις παραμετρικές σχέσεις, βρίσκουμε δύο εξισώσεις. Για παράδειγμα, εάν $u \neq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} v(x - x_1) &= u(y - y_1), \\ w(x - x_1) &= u(z - z_1), \end{aligned}$$

δηλαδή ένα σύστημα δύο εξισώσεων, που παριστάνει την ευθεία ως τομή δύο επιπέδων.

Δραστηριότητα 2.13 Βρείτε το σύστημα δύο εξισώσεων που περιγράφει ως τομή δύο επιπέδων την ευθεία που περνάει από το σημείο $P : (1, -3, 1)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{a} = (0, 1, -2)$.

Γενικότερα, θεωρούμε το σύστημα δύο εξισώσεων

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned}$$

Κάθε εξίσωση παριστάνει ένα επίπεδο, και οι λύσεις του συστήματος δίδουν τις συντεταγμένες των σημείων που βρίσκονται στην τομή των δύο επιπέδων.

- Εάν υπάρχει αριθμός μ τέτοιος ώστε

$$(A_1, B_1, C_1) = \mu(A_2, B_2, C_2) \quad \text{και} \quad D_1 = \mu D_2,$$

οι δύο εξισώσεις ικανοποιούνται ακριβώς από τα ίδια σημεία, δηλαδή τα επίπεδα συμπίπτουν.

- Εάν υπάρχει αριθμός μ τέτοιος ώστε

$$(A_1, B_1, C_1) = \mu(A_2, B_2, C_2) \quad \text{αλλά} \quad D_1 \neq \mu D_2,$$

τότε τα δύο επίπεδα είναι παράλληλα: είναι και τα δύο κάθετα στο διάνυσμα (A_1, B_1, C_1) και δεν υπάρχουν κοινά σημεία.

- Εάν τα διανύσματα (A_1, B_1, C_1) και (A_2, B_2, C_2) δεν είναι παράλληλα, τότε ούτε τα δύο επίπεδα είναι παράλληλα, και τέμνονται σε μία ευθεία. Σε αυτή την περίπτωση τουλάχιστον ένα από τα $A_1B_2 - B_1A_2$, $A_1C_2 - C_1A_2$, $B_1C_2 - C_1B_2$ δεν είναι μηδέν.

Για να βρούμε την παραμετρική περιγραφή της ευθείας στην οποία τέμνονται τα δύο επίπεδα, μπορούμε να λύσουμε το σύστημα των δύο γραμμικών εξισώσεων, όπως γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Δραστηριότητα 2.14 Βρείτε μία παραμετρική περιγραφή της ευθείας στην οποία τέμνονται τα επίπεδα με εξισώσεις $y + z - 1 = 0$ και $y + 2z - 1 = 0$, λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων (στο $\mathbb{R}^3$!).

Για έναν εναλλακτικό τρόπο να βρούμε την παραμετρική περιγραφή της ευθείας, παρατηρούμε ότι το διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας είναι κάθετο στα (A_1, B_1, C_1) και (A_2, B_2, C_2) , άρα είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα $(A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2)$. Άρα η παραμετρική παράσταση της ευθείας είναι

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2),$$

όπου (x_0, y_0, z_0) είναι ένα σημείο της ευθείας. Για παράδειγμα, εάν $A_1B_2 - B_1A_2 \neq 0$, μπορούμε να θέσουμε $z_0 = 0$ και να λύσουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} A_1x_0 + B_1y_0 &= -D_1 \\ A_2x_0 + B_2y_0 &= -D_2 \end{aligned}$$

για να βρούμε το σημείο $(x_0, y_0, 0)$,

$$x_0 = \frac{-(D_1 B_2 - B_1 D_2)}{A_1 B_2 - B_1 A_2}, \quad y_0 = \frac{-(A_1 D_2 - D_1 A_2)}{A_1 B_2 - B_1 A_2}.$$

Δραστηριότητα 2.15 Βρείτε μία παραμετρική περιγραφή της ευθείας στην οποία τέμνονται τα επίπεδα με εξισώσεις $y + z - 1 = 0$ και $y + 2z - 1 = 0$, χρησιμοποιώντας το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων συντελεστών.

Απόσταση σημείου από ευθεία

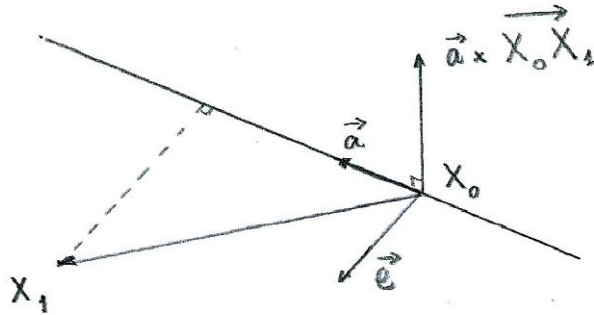
Θεωρούμε μία ευθεία ε και ένα σημείο X_1 στο E^3 . Θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου X_1 από την ευθεία ε . Μία ευθεία στο χώρο δεν έχει μοναδική κάθετη διεύθυνση. Πρώτα θα βρούμε το επίπεδο που περιέχει την ευθεία ε και το σημείο X_1 , ώστε να προσδιορίσουμε την διεύθυνση σε αυτό το επίπεδο που είναι κάθετη προς την ευθεία.

Έστω ότι η ευθεία ε έχει παραμετρική περιγραφή $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX_0} + t\vec{a}$ με $X_0 : (x_0, y_0, z_0)$ και $\vec{a} = (u, v, w)$, και το σημείο X_1 έχει συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1) .

Τότε το διάνυσμα $\vec{a} \times \overrightarrow{X_0 X_1}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που περιέχει την ευθεία ε και το σημείο X_1 , και το διάνυσμα

$$\vec{e} = (\vec{a} \times \overrightarrow{X_0 X_1}) \times \vec{a}$$

είναι παράλληλο προς αυτό το επίπεδο και κάθετο στην ευθεία ε .



Σχήμα 2.13: Κάθετος από σημείο προς ευθεία στο χώρο.

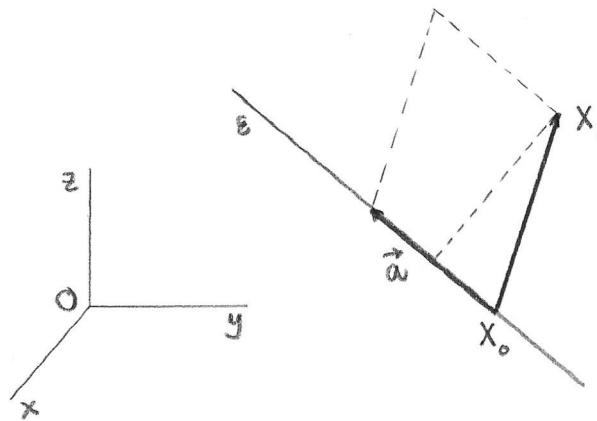
Συμπεραίνουμε ότι η απόσταση του X_1 από την ευθεία είναι το μέτρο της προβολής του $\overrightarrow{X_0 X_1}$ πάνω στο $\vec{e}$:

$$\begin{aligned} d(X_1, \varepsilon) &= |\text{pr}_{\vec{e}} \overrightarrow{X_0 X_1}| = \left| \frac{\vec{e} \cdot \overrightarrow{X_0 X_1}}{|\vec{e}|} \right| \\ &= \frac{|((\vec{a} \times \overrightarrow{X_0 X_1}) \times \vec{a}) \cdot \overrightarrow{X_0 X_1}|}{|(\vec{a} \times \overrightarrow{X_0 X_1}) \times \vec{a}|}. \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι μπορούμε να αλλάξουμε τη θέση των πράξεων στο μικτό γινόμενο, δηλαδή έχουμε $((\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}) \times \vec{a}) \cdot \overrightarrow{X_0X_1} = (\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}) \cdot (\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1})$. Παρατηρούμε ότι $\vec{a}$ είναι κάθετο στο $\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}$, και συνεπώς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων των δύο διανυσμάτων, $|(\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}) \times \vec{a}| = |(\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1})| |\vec{a}|$. Άρα

$$\begin{aligned} d(X_1, \varepsilon) &= \frac{|(\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}) \cdot (\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1})|}{|\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}| |\vec{a}|} \\ &= \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}|}{|\vec{a}|}. \end{aligned}$$

Το τελικό αποτέλεσμα έχει μία ενδιαφέρουσα ερμηνεία. $|\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}|$ είναι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου με μία πλευρά το διάνυσμα $\vec{a}$ πάνω στην ευθεία ε , και άλλη πλευρά το διάνυσμα $\overrightarrow{X_0X_1}$ από το σημείο X_0 πάνω στην ευθεία ε στο σημείο X_1 , Σχέδιο 2.14. Όταν διαιρέσουμε αυτό το εμβαδόν με το μήκος της πλευράς $\vec{a}$, παίρνουμε το ύψος του παραλληλογράμμου, δηλαδή την κάθετη απόσταση από το σημείο X_1 στην ευθεία ε .



Σχήμα 2.14: Η απόσταση σημείου από ευθεία στο χώρο.

Δραστηριότητα 2.16 Η ευθεία ε περνάει από το σημείο $P : (2, 2, 2)$ και έχει διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{a} = (1, 2, -1)$. Βρείτε το κάθετο διάνυσμα από το σημείο αναφοράς O στην ευθεία ε , καθώς και την απόσταση από το O στην ε .

Ασύμβατες ευθείες

Θεωρούμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 στο χώρο E^3 : η ε_1 περνάει από το σημείο X_1 και έχει διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{a}_1$, ενώ η ε_2 περνάει από το σημείο X_2 και έχει διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{a}_2$. Η παραμετρική έκφραση για το γενικό σημείο των δύο ευθειών είναι

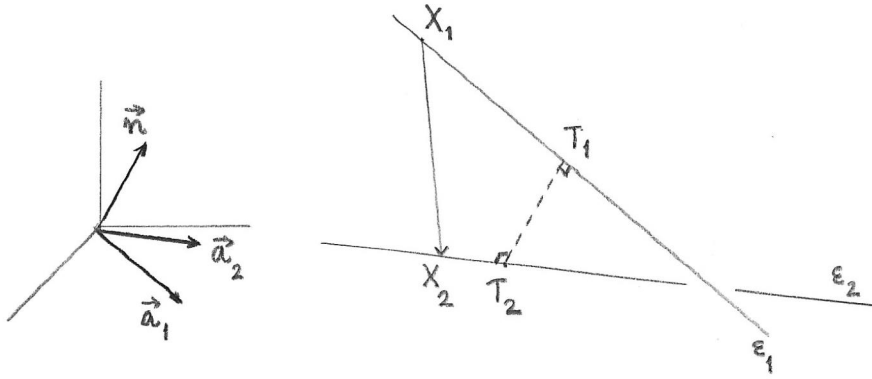
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OX_1} + t\vec{a}_1 & t \in \mathbb{R}, \\ \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OX_2} + s\vec{a}_2 & s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Εάν οι ευθείες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{X_1X_2}$, $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$ είναι συνεπίπεδα και

$$[\overrightarrow{X_1X_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] = 0.$$

Στην αντίθετη περίπτωση οι ευθείες ονομάζονται **ασύμβατες**. Ασύμβατες ευθείες έχουν μοναδική κοινή κάθετο ευθεία κ . Το διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{n}$ της κ είναι κάθετο στο $\vec{a}_1$ και στο $\vec{a}_2$, και μπορούμε να θεωρήσουμε

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2.$$



Σχήμα 2.15: Η κοινή κάθετος ασύμβατων ευθειών στο χώρο.

Η ελάχιστη απόσταση των δύο ευθειών είναι το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{X_1X_2}$, από ένα σημείο της μίας ευθείας σε ένα σημείο της άλλης, πάνω στο διάνυσμα $\vec{n}$ στη διεύθυνση της κοινής καθέτου:

$$\begin{aligned} d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= |\text{pr}_{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2} \overrightarrow{X_1X_2}| \\ &= \frac{|\overrightarrow{X_1X_2} \cdot \vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \\ &= \frac{|[\overrightarrow{X_1X_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2]|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}. \end{aligned}$$

Για να προσδιορίσουμε τα σημεία τομής T_1 και T_2 της κοινής καθέτου κ με τις ε_1 και ε_2 , εργαζόμαστε ως εξής: Το σημείο T_1 ανήκει στην ε_1 , άρα υπάρχει t για το οποίο

$$\overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{OX_1} + t \vec{a}_1 \quad (2.8)$$

και παρόμοια για το T_2 και την ε_2 , υπάρχει s για το οποίο

$$\overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OX_2} + s \vec{a}_2. \quad (2.9)$$

Επίσης $\overrightarrow{T_1T_2}$ είναι παράλληλο προς το $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$, και άρα

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \ell \vec{a}_1 \times \vec{a}_2. \quad (2.10)$$

Αφού $\overrightarrow{T_1 T_2} = \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1}$, από τις 2.8, 2.9 και 2.10 έχουμε

$$\overrightarrow{OX_2} - \overrightarrow{OX_1} + s\vec{a}_2 - t\vec{a}_1 = \ell\vec{a}_1 \times \vec{a}_2,$$

το οποίο είναι ένα σύστημα 3 εξισώσεων (μία για κάθε συντεταγμένη) με 3 αγνώστους s , t και ℓ , το οποίο μπορούμε να λύσουμε για να προσδιορίσουμε τα t , s και εν συνεχεία τα T_1 , T_2 .

Παράδειγμα 2.2 Δίδονται ευθείες ε_1 και ε_2 τέτοιες ώστε η ε_1 περνά από το σημείο $A : (2, -1, 0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u} = (1, 3, -1)$, και η ε_2 περνά από το σημείο $B : (0, 1, 3)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{v} = (2, 1, 1)$.

Αφού τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ δεν είναι συγγραμμικά, υπάρχει μοναδική κοινή βκάθετος, με διάνυσμα διεύθυνσης

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (4, -3, -5).$$

Υπολογίζουμε το μικτό γινόμενο

$$[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = (-2, 2, 3) \cdot (4, -3, -5) = -29.$$

Συμπεραίνουμε ότι οι ευθείες είναι ασύμβατες.

Το διάνυσμα $\vec{u} \times \vec{v}$ έχει μέτρο $|\vec{u} \times \vec{v}| = 5\sqrt{2}$.

Συνεπώς η απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών είναι

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{|-29|}{5\sqrt{2}} = \frac{29\sqrt{2}}{10}.$$

Για να βρούμε τα σημεία τομής των δύο ευθειών με την κοινή κάθετο, χρησιμοποιούμε το σύστημα

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + s\vec{v} - t\vec{u} = \ell(\vec{u} \times \vec{v}),$$

δηλαδή

$$(-2, 2, 3) + s(2, 1, 1) - t(1, 3, -1) = \ell(4, -3, -5),$$

ή

$$\begin{aligned} 2s - t - 4\ell &= 2 \\ s - 3t + 3\ell &= -2 \\ s + t + 5\ell &= -3 \end{aligned},$$

το οποίο λύνουμε για να προσδιορίσουμε τα s και t :

$$t = \frac{1}{25}, \quad s = -\frac{7}{50}.$$

Άρα τα σημεία τομής με την κοινή κάθετο είναι

$$\begin{aligned} T_1 &= (2, -1, 0) + \frac{1}{25}(1, 3, -1), \\ T_2 &= (0, 1, 3) - \frac{7}{50}(2, 1, 1). \end{aligned}$$

Η κοινή κάθετος κ έχει παραμετρική έκφραση

$$\overrightarrow{OX} = (2, -1, 0) + \frac{1}{25}(1, 3, -1) + \ell(4, -3, -5).$$

Επαληθεύουμε την απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών,

$$|T_1 - T_2| = \frac{1}{50}|(116, -87, -145)| = \frac{29\sqrt{2}}{10}.$$

Δραστηριότητα 2.17 Η ευθεία ε περνάει από το σημείο $P : (2, 2, 2)$ και έχει διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{a} = (1, 2, -1)$. Βρείτε την απόσταση από τον άξονα Ox στην ε .

Διάλεξη 8

Δύο δυϊκές διαδικασίες: Γεωμετρικός μετασχηματισμός και αλλαγή συστήματος αναφοράς

Ένας ευκλείδειος γεωμετρικός μετασχηματισμός είναι μία απεικόνιση $\varphi : E^2 \rightarrow E^2$ που διατηρεί τις αποστάσεις μεταξύ σημείων του επιπέδου, δηλαδή για κάθε $P, Q \in E^2$,

$$d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q).$$

Θα μελετήσουμε πώς εκφράζονται μέσω των συντεταγμένων των σημείων διάφοροι ευκλείδαιοι μετασχηματισμοί. Εάν (x, y) είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου Q , και (x', y') οι συντεταγμένες του σημείου $\varphi(Q)$, θέλουμε να βρούμε τη συνάρτηση που εκφράζει τον ευκλείδειο μετασχηματισμό φ ως προς τις συντεταγμένες, δηλαδή τη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ για την οποία

$$\varphi(x, y) = (x', y').$$

Εάν G είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y) = 0$, θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της οποίας γεωμετρικός τόπος είναι η εικόνα του G από το μετασχηματισμό φ , δηλαδή το σχήμα $\varphi(G)$. Το σημείο με συντεταγμένες $(x', y') = \varphi(x, y)$ ανήκει στο σχήμα $\varphi(G)$ εάν και μόνον εάν το σημείο με συντεταγμένες $(x, y) = \varphi^{-1}(x', y')$ ικανοποιεί την εξίσωση $f(x, y) = 0$. Συνεπώς το (x', y') πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση $f \circ \varphi^{-1}(x', y') = 0$. Θα δούμε τη συγκεκριμένη μορφή που παίρνει αυτή η εξίσωση σε απλά σχήματα.

Η επιλογή του σημείου αναφοράς και των αξόνων στο ευκλείδειο επίπεδο μπορεί να γίνει αυθαίρετα. Κάθε επιλογή καθορίζει διαφορετικές συντεταγμένες για κάθε σημείο και διαφορετικές αναλυτικές εξισώσεις για γεωμετρικά αντικείμενα. Στη μελέτη ενός προβλήματος η επιλογή του κατάλληλου συστήματος αναφοράς μπορεί να απλοποιήσει πολύ τους υπολογισμούς. Θα εξετάσουμε πώς αλλάζουν οι συντεταγμένες ενός σημείου ή οι εξισώσεις ευθειών και άλλων γεωμετρικών αντικειμένων όταν αλλάζει η επιλογή ορθοκανονικού συστήματος αναφοράς.

Θεωρούμε το ευκλείδειο επίπεδο στο οποίο έχουμε επιλέξει ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, και ένα δεύτερο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(P, \vec{m}, \vec{n})$. Υποθέτουμε ότι ένα σημείο X έχει συντεταγμένες (x, y) ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, και συντεταγμένες (u, v) ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{m}, \vec{n})$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\overrightarrow{OX} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{PX} = u\vec{m} + v\vec{n}.$$

Αρχικά θέλουμε να βρούμε τη σχέση μεταξύ των (x, y) και των (u, v) .

Συμβολίζουμε (p, q) τις συντεταγμένες του σημείου P ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, δηλαδή $\overrightarrow{OP} = p\vec{i} + q\vec{j}$. Αφού

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX},$$

παίρνουμε τη σχέση μεταξύ των (x, y) και των (u, v) :

$$(x - p)\vec{i} + (y - q)\vec{j} = u\vec{m} + v\vec{n}. \quad (2.11)$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μία δυϊκότητα μεταξύ ενός μετασχηματισμού, που μετακινεί τα σχήματα χωρίς να αλλάζει το σύστημα αναφοράς, και μίας αλλαγής του συστήματος αναφοράς, όπου τα σχήματα του επιπέδου παραμένουν σταθερά, αλλά αλλάζουν οι εξισώσεις που τα περιγράφουν. Θα δούμε ότι αυτή η δυϊκότητα εμφανίζεται με συγκεκριμένο τρόπο στους υπολογισμούς.

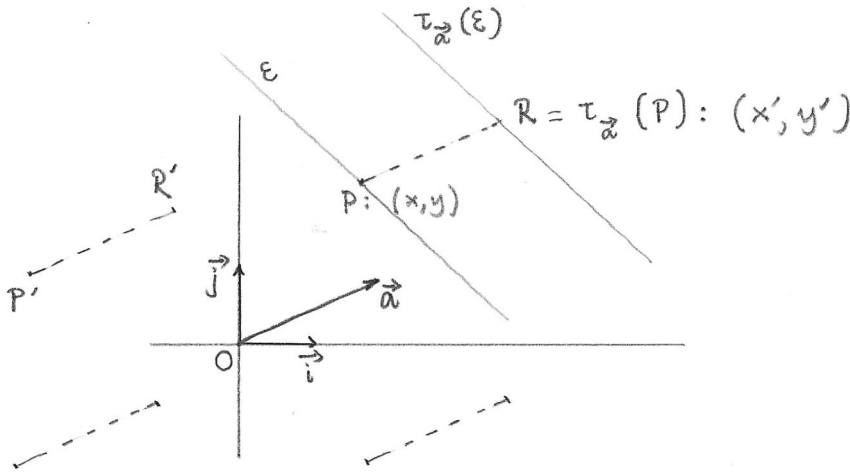
Ευκλείδεια μεταφορά

Μία **μεταφορά** είναι ένας ευκλείδειος μετασχηματισμός $\tau_{\vec{a}} : E^2 \rightarrow E^2$ που μετατοπίζει κάθε σημείο του επιπέδου κατά ένα σταθερό διάνυσμα $\vec{a}$: για κάθε σημείο P , $\tau_{\vec{a}}(P)$ είναι το σημείο R για το οποίο

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \vec{a}.$$

Εάν $\vec{a} = (s, t)$ και $P : (x, y)$, τότε $\tau_{\vec{a}}(P)$ είναι το σημείο με συντεταγμένες $(x + s, y + t)$. Συνεπώς σε συντεταγμένες η απεικόνιση γράφεται

$$\tau_{\vec{a}}(x, y) = (x + s, y + t).$$



Σχήμα 2.16: Μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{a}$.

Εάν ϵ είναι μία ευθεία στο επίπεδο, με εξίσωση

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.12)$$

θέλουμε να υπολογίσουμε την εξίσωση της ευθείας $\tau_{\vec{a}}(\epsilon)$. Δηλαδή θέλουμε να βρούμε τη σχέση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες των σημείων $\tau_{\vec{a}}(x, y)$ όταν (x, y) ανήκουν στο

γεωμετρικό τόπο της εξίσωσης $Ax + By + C = 0$. Συμβολίζουμε (x', y') τις συντεταγμένες του σημείου $\tau_a(x, y)$, δηλαδή $(x', y') = (x + s, y + t)$, και συνεπώς

$$x = x' - s, \quad y = y' - t.$$

Αντικαθιστούμε στην 2.12, και έχουμε

$$A(x' - s) + B(y' - t) + C = 0.$$

Γράφουμε αυτή την εξίσωση σε κανονική μορφή,

$$Ax' + By' + C - As - Bt = 0. \quad (2.13)$$

Καταλήγουμε ότι η εικόνα της ευθείας ε από το μετασχηματισμό τ_a είναι η ευθεία στο επίπεδο με εξίσωση 2.13.

Γενικότερα, εάν G είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y) = 0$, τότε $\tau_a(G)$ είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x' - s, y' - t) = 0$.

Παράδειγμα 2.3 Θεωρούμε την ευθεία ε , με εξίσωση $2x + y - 1 = 0$. Θα βρούμε την εξίσωση της εικόνας της ευθείας ε από τη μεταφορά

$$\tau(x, y) = (x', y') = (x + 2, y - 1).$$

Η αντίστροφη απεικόνιση είναι η $\tau^{-1}(x', y') = (x' - 2, y' + 1)$.

Τα σημεία της εικόνας $\tau(\varepsilon)$ ικανοποιούν την εξίσωση $2(x' - 2) + (y' + 1) - 1 = 0$, δηλαδή

$$2x' + y' - 4 = 0.$$

2.0.1 Μεταφορά του σημείου αναφοράς

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την αλλαγή συστήματος αναφοράς. Στο Ευκλείδειο επίπεδο θεωρούμε δύο συστήματα αναφοράς με διαφορετικό σημείο αναφοράς αλλά παράλληλους και ομόρροπους άξονες: $(O, \vec{i}, \vec{j})$ και $(P, \vec{i}, \vec{j})$. Σε αυτήν την περίπτωση η 2.11 γίνεται

$$(x - p)\vec{i} + (y - q)\vec{j} = u\vec{i} + v\vec{j},$$

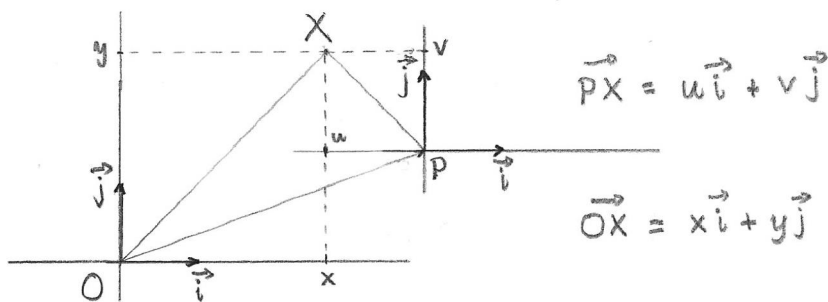
και συνεπώς

$$x = u + p \quad \text{και} \quad y = v + q. \quad (2.14)$$

Θεωρούμε τώρα μία ευθεία ε με εξίσωση 2.12 ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της ίδιας ευθείας ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.

Αντικαθιστώντας τις 2.14 στην εξίσωση της ευθείας 2.12 έχουμε την εξίσωση που πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες ενός σημείου ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$ για να βρίσκεται το σημείο στην ευθεία ε :

$$A(u + p) + B(v + q) + C = 0.$$



Σχήμα 2.17: Αλλαγή σημείου αναφοράς.

Καταλήγουμε ότι η εξίσωση της ευθείας ε ως προς το σύστημα συντεταγμένων $(P, \vec{i}, \vec{j})$ σε κανονική μορφή είναι

$$Au + Bv + C + Ap + Bq = 0.$$

Γενικότερα, εάν G είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y) = 0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, τότε η εξίσωση του G ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$ είναι $f(u + p, v + q) = 0$.

Παράδειγμα 2.4 Θα βρούμε την εξίσωση της ευθείας ε του Παραδείγματος 2.3 ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$, όπου P είναι το σημείο που προκύπτει από τη μεταφορά του O κατά $(-2, 1)$. Αφού P είναι το σημείο $(-2, 1)$, οι συντεταγμένες ως προς τα δύο συστήματα ικανοποιούν τις σχέσεις $x = u - 2$, $y = v + 1$, και η εξίσωση της ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$ θα είναι $2(u - 2) + (v + 1) - 1 = 0$, δηλαδή

$$2u + v - 4 = 0.$$

Δραστηριότητα 2.18 Η ευθεία ε έχει εξίσωση $x + y = 0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

α'. Βρείτε την εξίσωση της εικόνας της ε από τον ευκλείδειο μετασχηματισμό $\varphi(x, y) = (x - 1, y)$.

β'. Βρείτε την εξίσωση της ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$, όπου $P : (-1, 1)$.

Περιστροφή

Το επόμενο είδος γεωμετρικού μετασχηματισμού που θα εξετάσουμε είναι η περιστροφή γύρω από το σημείο αναφοράς O .

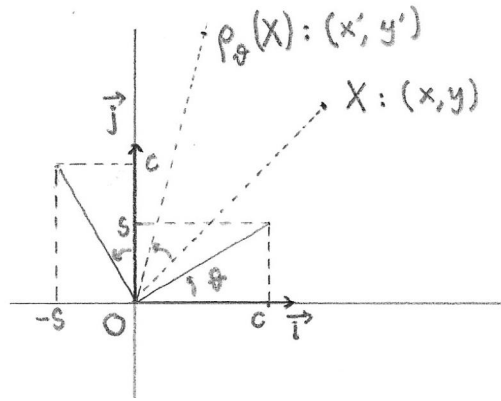
Η περιστροφή κατά (προσημασμένη) γωνία ϑ γύρω από το σημείο αναφοράς O είναι ο ευκλείδειος γεωμετρικός μετασχηματισμός $\rho_\vartheta : E^2 \rightarrow E^2$ που αφήνει το σημείο O σταθερό

και περιστρέφει κάθε άλλο σημείο του επιπέδου γύρω από το O κατά σταθερή γωνία ϑ . Ειδικότερα, η ρ_ϑ απεικονίζει το σημείο $(1, 0)$ στο $(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ και το σημείο $(0, 1)$ στο $(-\sin \vartheta, \cos \vartheta)$, Σχήμα 2.18. Το γενικό σημείο $X : (x, y)$ απεικονίζεται στο $\rho_\vartheta(X) : (x', y')$, το οποίο υπολογίζουμε χρησιμοποιώντας πολλαπλασιασμό πινάκων

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

δηλαδή

$$\rho_\vartheta(x, y) = (x', y') = (x \cos \vartheta - y \sin \vartheta, x \sin \vartheta + y \cos \vartheta).$$



Σχήμα 2.18: Περιστροφή κατά γωνία ϑ γύρω από το σημείο αναφοράς O .

Γεωμετρικά είναι προφανές ότι η αντίστροφη απεικόνιση της περιστροφής κατά γωνία ϑ είναι η περιστροφή κατά την αντίθετη γωνία, $-\vartheta$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\cos(-\vartheta) = \cos \vartheta$ και $\sin(-\vartheta) = -\sin \vartheta$, έχουμε και την αντίστροφη σχέση,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Θεωρούμε την ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + C = 0$. Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας $\rho_\vartheta(\varepsilon)$ χρησιμοποιούμε την 2.16 για να αντικαταστήσουμε τα x, y συναρτήσει των x', y' ,

$$A(x' \cos \vartheta + y' \sin \vartheta) + B(-x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta) + C = 0.$$

Καταλήγουμε ότι η εξίσωση της ευθείας $\rho_\vartheta(\varepsilon)$ σε κανονική μορφή είναι $A'x' + B'y' + C' = 0$, όπου οι συντελεστές A', B', C' δίδονται από

$$A' = A \cos \vartheta - B \sin \vartheta, \quad B' = A \sin \vartheta + B \cos \vartheta \quad \text{και} \quad C' = C.$$

Παράδειγμα 2.5 Θα βρούμε την εξίσωση της εικόνας της ευθείας ζ με εξίσωση $x + \sqrt{3}y - \sqrt{3} = 0$, από την περιστροφή κατά γωνία $\pi/6$. Έχουμε $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$, $\sin \pi/6 = 1/2$,

συνεπώς

$$\rho_{\pi/6}(x, y) = (x', y') = \left(\frac{\sqrt{3}x - y}{2}, \frac{x + \sqrt{3}y}{2} \right).$$

Παρατηρούμε ότι η ευθεία ζ έχει κλίση $-\sqrt{3}/3 = \tan(-\pi/6)$, δηλαδή σχηματίζει γωνία $\pi/6$ με τον άξονα $y = 0$.

Η αντίστροφη απεικόνιση, που δίδει τα x, y συναρτήσει των x', y' , είναι η περιστροφή κατά γωνία $-\pi/6$,

$$(x, y) = \rho_{\pi/6}^{-1}(x', y') = \left(\frac{\sqrt{3}x' + y'}{2}, \frac{-x' + \sqrt{3}y'}{2} \right).$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ε έχουμε $\frac{\sqrt{3}x' + y'}{2} + \sqrt{3}\frac{-x' + \sqrt{3}y'}{2} - \sqrt{3} = 0$, δηλαδή

$$2y' - \sqrt{3} = 0.$$

Άρα η εικόνα $\rho_{\pi/6}(\zeta)$ είναι η ευθεία $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Παρατηρούμε ότι $\rho_{\pi/6}(\zeta)$ έχει κλίση 0, δηλαδή είναι παράλληλη προς τον άξονα $y = 0$.

2.0.2 Περιστροφή του συστήματος αναφοράς

Επιστρέφοντας στην αλλαγή συστήματος αναφοράς, θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το σημείο αναφοράς παραμένει σταθερό, $P = O$, και οι άξονες περιστρέφονται κατά γωνία ϑ ,

$$\vec{m} = \cos \vartheta \vec{i} + \sin \vartheta \vec{j} \quad \vec{n} = -\sin \vartheta \vec{i} + \cos \vartheta \vec{j}.$$

Σε αυτή την περίπτωση $\overrightarrow{OP} = 0$, και η σχέση 2.11 που συνδέει τις συντεταγμένες (x, y) του σημείου X ως προς το $(O, \vec{i}, \vec{j})$ με τις συντεταγμένες (u, v) του σημείου X ως προς το $(O, \vec{m}, \vec{n})$ γίνεται

$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} &= u\vec{m} + v\vec{n} \\ &= u(\cos \vartheta \vec{i} + \sin \vartheta \vec{j}) + v(-\sin \vartheta \vec{i} + \cos \vartheta \vec{j}) \\ &= (u \cos \vartheta - v \sin \vartheta) \vec{i} + (u \sin \vartheta + v \cos \vartheta) \vec{j}. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$x = u \cos \vartheta - v \sin \vartheta, \quad y = u \sin \vartheta + v \cos \vartheta$$

και αντίστροφα

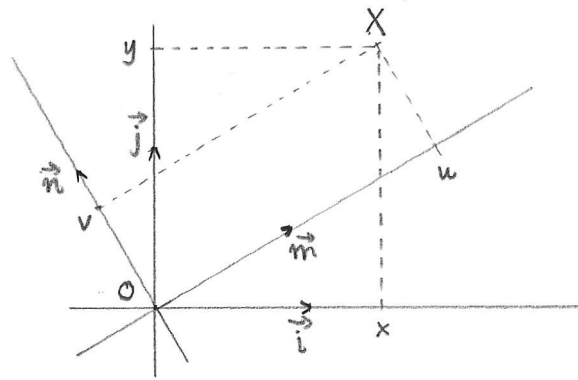
$$u = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \quad v = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta.$$

Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας $\varepsilon : Ax + By + C = 0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$, αντικαθιστούμε τις x, y συναρτήσει των u, v :

$$A(u \cos \vartheta - v \sin \vartheta) + B(u \sin \vartheta + v \cos \vartheta) + C = 0.$$

Σε κανονική μορφή η εξίσωση είναι

$$(A \cos \vartheta + B \sin \vartheta)u + (-A \sin \vartheta + B \cos \vartheta)v + C = 0.$$



Σχήμα 2.19: Περιστροφή των αξόνων του συστήματος αναφοράς.

Παράδειγμα 2.6 Θα βρούμε την εξίσωση της ευθείας ζ του Παραδείγματος 2.5 ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$, όπου τα διανύσματα $\vec{m}$ και $\vec{n}$ προκύπτουν από τα $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα, με περιστροφή κατά $-\pi/6$,

$$\vec{m} = \frac{\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}}{2}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}}{2}.$$

Τότε από την 2.11 έχουμε

$$x\vec{i} + y\vec{j} = u\frac{\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}}{2} + v\frac{\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}}{2},$$

δηλαδή

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}v, \quad y = -\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ζ έχουμε

$$\frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}v + \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v\right) - \sqrt{3} = 0,$$

δηλαδή

$$2v - \sqrt{3} = 0.$$

Δραστηριότητα 2.19 Η ευθεία ε έχει εξίσωση $x + y = 0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

α'. Βρείτε την εξίσωση της εικόνας της ε από τον ευκλείδειο μετασχηματισμό $\chi(x, y) = (y, -x)$.

β'. Βρείτε την εξίσωση της ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$, όπου $\vec{u} = -\vec{j}$ και $\vec{v} = \vec{i}$.

Δραστηριότητα 2.20 Επαληθεύστε ότι οι πίνακες $\begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$ είναι ο ένας αντίστροφος του άλλου.

Γενικοί μετασχηματισμοί

Ο γενικός ευκλείδειος γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου είναι σύνθεση μεταφορών και περιστροφών εάν διατηρεί τον προσανατολισμό, δηλαδή εάν διατηρεί το πρόσημο της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων. Εάν αντιστρέφει τον προσανατολισμό, δηλαδή αλλάζει το πρόσημο της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων, τότε είναι σύνθεση μεταφορών, περιστροφών και της ανάκλασης $(x, y) \mapsto (-x, y)$.

Πρόταση 2.10 Ένας ευκλείδειος γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου $\varphi : E^2 \longrightarrow E^2$ που διατηρεί τον προσανατολισμό γράφεται στη μορφή

$$\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1,$$

όπου $(s, t) = \varphi(0, 0)$, $(a, b) = \varphi(1, 0) - \varphi(0, 0)$ και $(-b, a) = \varphi(0, 1) - \varphi(0, 0)$.

Ένας ευκλείδειος γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου $\psi : E^2 \longrightarrow E^2$ που αντιστρέφει τον προσανατολισμό γράφεται στη μορφή

$$\psi(x, y) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1,$$

όπου $(s, t) = \psi(0, 0)$, $(-a, b) = \psi(1, 0) - \psi(0, 0)$ και $(b, a) = \psi(0, 1) - \psi(0, 0)$.

Δραστηριότητα 2.21 Επαληθεύστε ότι ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix} -a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, με $a^2 + b^2 = 1$, είναι ο εαυτός του.

Δραστηριότητα 2.22 Η ευθεία ε έχει εξίσωση $x + y = 0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

α'. Βρείτε την εξίσωση της εικόνας της ε από τον ευκλείδειο μετασχηματισμό $\rho(x, y) = (-y, -x)$.

β'. Βρείτε την εξίσωση της ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$, όπου $\vec{u} = -\vec{j}$ και $\vec{v} = -\vec{i}$.

Δραστηριότητα 2.23 Η ευθεία ζ έχει εξίσωση $x + y = 1$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

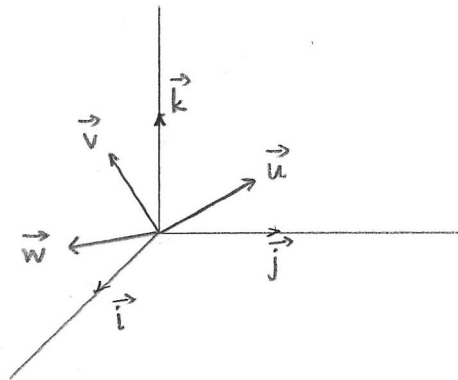
α'. Βρείτε την εξίσωση της εικόνας της ζ από τον ευκλείδειο μετασχηματισμό $\psi(x, y) = (-y + 1, -x)$.

β'. Βρείτε την εξίσωση της ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{u}, \vec{v})$, όπου $P : (0, 1)$, $\vec{u} = -\vec{j}$ και $\vec{v} = -\vec{i}$.

Αλλαγή συστήματος αναφοράς στο χώρο

Θεωρούμε δύο **ορθοκανονικά** συστήματα αναφοράς στο χώρο, $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ και $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, και θέλουμε να εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων ενός σημείου ως προς τα δύο διαφορετικά συστήματα.

Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το σημείο αναφοράς των δύο συστημάτων είναι το ίδιο. Έχουμε λοιπόν τα συστήματα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ και $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, Σχήμα 2.20



Σχήμα 2.20: Συστήματα αναφοράς στο χώρο

Εάν X είναι σημείο του χώρου, με συντεταγμένες (x, y, z) ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, το διάνυσμα θέσης του X είναι

$$\overrightarrow{OX} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (2.17)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες (x', y', z') του X ως προς το σύστημα $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, οι οποίες δίδονται από τη σχέση

$$\overrightarrow{OX} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}. \quad (2.18)$$

Για να πετύχουμε αυτό, χρειάζεται να εκφράσουμε τα διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Έστω

$$\vec{i} = a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w}$$

$$\begin{aligned}\vec{j} &= a_2\vec{u} + b_2\vec{v} + c_2\vec{w} \\ \vec{k} &= a_3\vec{u} + b_3\vec{v} + c_3\vec{w}\end{aligned}\quad (2.19)$$

Τότε αντικαθιστώντας τις 2.19 στην 2.17 έχουμε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= x(a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w}) \\ &\quad + y(a_2\vec{u} + b_2\vec{v} + c_2\vec{w}) \\ &\quad + z(a_3\vec{u} + b_3\vec{v} + c_3\vec{w}) \\ &= (xa_1 + ya_2 + za_3)\vec{u} \\ &\quad + (xb_1 + yb_2 + zb_3)\vec{v} \\ &\quad + (xc_1 + yc_2 + zc_3)\vec{w}\end{aligned}$$

και συγκρίνοντας με την 2.18 έχουμε

$$\begin{aligned}x' &= a_1x + a_2y + a_3z \\ y' &= b_1x + b_2y + b_3z \\ z' &= c_1x + c_2y + c_3z\end{aligned}\quad (2.20)$$

Μπορούμε να παραστήσουμε αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το συμβολισμό πινάκων,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ο οποίος σημαίνει ότι ο αριθμός στην πρώτη γραμμή στην αριστερή πλευρά είναι ίσος με το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων της πρώτης γραμμής του πίνακα, με τα αντίστοιχα στοιχεία του διανύσματος συντεταγμένων, και ανάλογα για τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή.

Δραστηριότητα 2.24 Θεωρήστε τα διανύσματα $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$, $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ και $\vec{w} = \vec{k}$.

α'. Υπολογίστε τους συντελεστές a_n , b_n , c_n της 2.19 και εκφράστε τα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ συνανρτήσει των $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$.

β'. Βρείτε τις συντεταγμένες ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ του σημείου X που έχει συντεταγμένες $(1, 1, 1)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Τώρα εξετάζουμε την περίπτωση όπου τα σημεία αναφοράς των δύο συστημάτων είναι διαφορετικά. Υποθέτουμε ότι τα δύο συστήματα είναι $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ και $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ και ότι

$$\overrightarrow{OP} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k},$$

δηλαδή οι συντεταγμένες του P ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ είναι (x_0, y_0, z_0) . Τότε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PX} &= \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} \\ &= (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}.\end{aligned}$$

Οι συντεταγμένες (x', y', z') του σημείου X ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, για τις οποίες

$$\overrightarrow{PX} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w},$$

δίδονται από τις σχέσεις

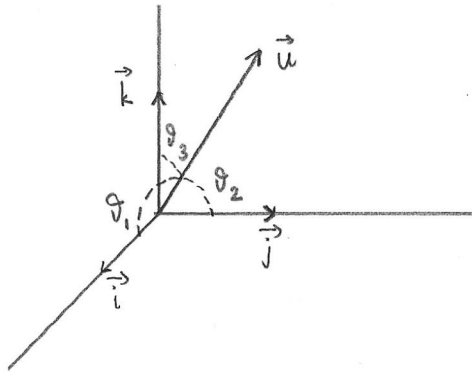
$$\begin{aligned}x' &= a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0) \\ y' &= b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + b_3(z - z_0) \\ z' &= c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) + c_3(z - z_0)\end{aligned}\tag{2.21}$$

Δραστηριότητα 2.25 Για τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ της Δραστηριότητας 2.24, το σημείο $P : (1, 0, 0)$ και το σημείο $X : (1, 1, 1)$,

α'. Βρείτε τις συντεταγμένες του X ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

β'. Βρείτε τις συντεταγμένες του X ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Απομένει να εξετάσουμε πως εκφράζουμε τα διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Συνήθως γνωρίζουμε την αντίστροφη σχέση, δηλαδή τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



Σχήμα 2.21: Συνημίτονα διεύθυνσης ενός διανύσματος

Ας εξετάσουμε πρώτα ένα διάνυσμα, έστω το $\vec{u}$. Οι συντεταγμένες του $\vec{u}$ ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ δίδονται από το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{u}$ με τα τρία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k}.$$

Αλλά, εφόσον τα διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{u}$ είναι μοναδιαία, το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{i}$ είναι απλώς το συνημίτονο της γωνίας ϑ_1 μεταξύ του $\vec{u}$ και του $\vec{i}$, και αντίστοιχα για τα $\vec{u} \cdot \vec{j}$, $\vec{u} \cdot \vec{k}$ και τις γωνίες ϑ_2 , ϑ_3 μεταξύ του $\vec{u}$ και των $\vec{j}$, $\vec{k}$ αντίστοιχα:

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = \cos \vartheta_1 \quad \vec{u} \cdot \vec{j} = \cos \vartheta_2 \quad \vec{u} \cdot \vec{k} = \cos \vartheta_3 \quad (2.22)$$

Συγκρίνοντας την 2.22 με την 2.19, βλέπουμε ότι

$$a_1 = \vec{i} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{i} = \cos \vartheta_1$$

και ανάλογα, $a_2 = \cos \vartheta_2$, $a_3 = \cos \vartheta_3$. Δηλαδή έχουμε

$$\vec{u} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}.$$

Οι συντεταγμένες (a_1, a_2, a_3) ονομάζονται **συνημίτονα διεύθυνσης** του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{u}$ ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Παρόμοια βρίσκουμε ότι

$$\vec{v} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k},$$

όπου $b_1 = \cos \varphi_1$, $b_2 = \cos \varphi_2$, $b_3 = \cos \varphi_3$ είναι τα συνημίτονα των γωνιών φ_1 , φ_2 , φ_3 μεταξύ του $\vec{v}$ και των $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ αντίστοιχα.

Τέλος

$$\vec{w} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}$$

για $c_1 = \cos \psi_1$, $c_2 = \cos \psi_2$, $c_3 = \cos \psi_3$ για τις γωνίες μεταξύ του $\vec{w}$ και των $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Ανακεφαλαιώνουμε : Θεωρούμε το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, και ένα δεύτερο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, τα διανύσματα του οποίου δίδονται ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \vec{u} &= a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \\ \vec{v} &= b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k} \\ \vec{w} &= c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}, \end{aligned}$$

τις οποίες μπορούμε να εκφράσουμε παραστατικά στον ακόλουθο πίνακα

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{u}$	a_1	a_2	a_3
$\vec{v}$	b_1	b_2	b_3
$\vec{w}$	c_1	c_2	c_3

ο οποίος ονομάζεται **πίνακας μετάβασης** από το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ στο σύστημα $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Υποθέτουμε επίσης ότι οι συντεταγμένες του σημείου P ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ είναι (x_0, y_0, z_0) .

Εάν το σημείο X έχει συντεταγμένες (x, y, z) ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ τότε οι συντεταγμένες (x', y', z') του X ως προς το σύστημα $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ δίδονται από τις σχέσεις

$$x' = a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0)$$

$$y' = b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + b_3(z - z_0)$$

$$z' = c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) + c_3(z - z_0)$$

Ασκήσεις 4

Άσκηση 4.1 Βρείτε δύο εξισώσεις της μορφής $Ax + By + Cz + D = 0$ που αποτελούν (και οι δύο μαζί!) την αναλυτική περιγραφή της ευθείας ε στο χώρο, που έχει παραμετρική περιγραφή

$$(x, y, z) = (3, 7, -6) + t(5, -4, 1).$$

Άσκηση 4.2 Έστω ε η ευθεία στο χώρο με παραμετρική περιγραφή

$$(x, y, z) = (2 + 2t, 2, 2 - 2t)$$

Θεωρήστε τις ευθείες

$$\delta_1 : (x, y, z) = (1, -1, 0) + r(1, 1, 0) \quad \text{και} \quad \delta_2 : (x, y, z) = (1, -1, 1) + s(-4, 0, 4).$$

Για $i = 1, 2$, να εξετάσετε αν η ε και η δ_i , έχουν κοινά σημεία, είναι παράλληλες ή είναι ασύμβατες.

Άσκηση 4.3 Θεωρήστε το επίπεδο Π με εξίσωση $2x + 3y + z + 1 = 0$, και τα επίπεδα $\Sigma_1: x + y + z + 1 = 0$ και $\Sigma_2: -4x - 6y - 2z - 2 = 0$.

α'. Βρείτε μία παραμετρική περιγραφή του συνόλου των κοινών σημείων του Π και του Σ_1 και του συνόλου των κοινών σημείων του Π και του Σ_2 .

β'. Υπολογίστε την απόσταση του σημείου $(1, 1, 1)$ από το επίπεδο Π , και την απόσταση του σημείου $(1, 1, 1)$ από την τομή των επιπέδων Π και Σ_1 .

Άσκηση 4.4 Εξετάστε εάν η ευθεία ε με παραμετρική περιγραφή $(x, y, z) = (3, -1, 4) + t(5, 1, 1)$ είναι παράλληλη προς το επίπεδο $\Pi : 2x - 2y + 3z - 5 = 0$. Εάν όχι, βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής.

Άσκηση 4.5 Βρείτε την παραμετρική παράσταση της κοινής καθέτου των ευθειών $\varepsilon_1 : (x, y, z) = (1, 3, 1) + s(1, 1, -1)$ και $\varepsilon_2 : (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, 0, -2)$. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών.

Άσκηση 4.6 Στο ευκλείδειο επίπεδο E^2 με σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, θεωρήστε σημεία $P : (-1, 2)$, $Q : (1, 1)$ και $R : (3, 2)$, την ευθεία ε που περνάει από τα σημεία Q, R και τον κύκλο C με κέντρο στο σημείο R και ακτίνα 2.

Δίδεται ο γεωμετρικός μετασχηματισμός $\varphi : E^2 \rightarrow E^2$ που κάνει μεταφορά κατά το διάνυσμα $\vec{a} = (2, 3)$.

- α'. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\varphi(Q)$ και $\varphi(R)$.
- β'. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- γ'. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας $\varphi(\varepsilon)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- δ'. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία $\varphi(Q), \varphi(R)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Τι σχέση έχουν αυτές οι δύο εξισώσεις;

Δίδεται και δεύτερο σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.

- ε'. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Q και R ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.
- ς'. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\varphi(Q)$ και $\varphi(R)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.
- ζ'. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.
- η'. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου $\varphi(C)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.

Θεωρήστε ένα τρίτο σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$, όπου $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ και $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$.

- θ'. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Q και R ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$.
- ι'. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\varphi(Q)$ και $\varphi(R)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$.
- ια'. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$.
- ιβ'. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου $\varphi(C)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$.

Άσκηση 4.7 Δείξτε ότι εάν τα συστήματα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ και $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

είναι ορθοκανονικά, τότε ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ των συντελεστών της 2.19

έχει την ιδιότητα $AA^T = I$.

Άσκηση 4.8 Βρείτε τις εξισώσεις των επιπέδων που διχοτομούν τις διέδρες γωνίες μεταξύ δύο επιπέδων.