

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 12

Παραμετρήσεις της σφαίρας, επιφάνειες εκ περιστροφής και επιφάνειες
δευτέρου βαθμού.

Άσκηση 12.1 Βρείτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου με γεωγραφικό πλάτος $\pi/4$ και γεωγραφικό μήκος $-\pi/2$.

Άσκηση 12.2 Βρείτε τις γεωγραφικές συντεταγμένες του σημείου στη μοναδιαία σφαίρα με καρτεσιανές συντεταγμένες $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Άσκηση 12.3 Βρείτε την εξίσωση της επιφάνειας που παράγεται κατά την περιστροφή των παρακάτω επίπεδων καμπυλών γύρω από τον άξονα που δίνεται, και περιγράψτε γεωμετρικά την επιφάνεια.

α'. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad \text{άξονας } Ox,$

β'. $x^2 + (y - 1)^2 = 9, \quad z = 0, \quad \text{άξονας } Oy,$

γ'. $y^2 = 4x, \quad z = 0 \quad \text{άξονας } Ox,$

δ'. $xz = 2, \quad y = 0, \quad \text{άξονας } Oz,$

ε'. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad \text{άξονας } x = 6, \quad z = 0,$

Άσκηση 12.4 Για τις ακόλουθες εξισώσεις,

α'. ονομάστε την επιφάνεια την οποία παριστάνουν

β'. βρείτε τις εξισώσεις των τομών της επιφάνειας με τα επίπεδα $z = 0$, $x = 0$ και $y = 0$.

γ'. βρείτε τις εξισώσεις των τομών της επιφάνειας με τα επίπεδα $z = 4$, $x = 4$ και $y = 4$.

i. $9x^2 + 4z^2 = 36y$

ii. $x^2 + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$

iii. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$

iv. $4y^2 + 4z^2 - x^2 = 0$

Άσκηση 12.5 Φέρετε τις ακόλουθες εξισώσεις σε κανονική μορφή συμπληρώνοντας τα τετράγωνα, ονομάστε τις επιφάνειες που παριστάνουν και βρείτε το κέντρο ή την κορυφή τους:

α'. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8 = 0$

β'. $2x^2 + y^2 - 4z^2 + 4z - 6y - 2 = 0$

γ'. $y^2 + x^2 - 4z^2 = 2x + 8z$

δ'. $x^2 + z^2 - 4x - y - 5 = 0$

Άσκηση 12.6 Θεωρήστε το μονόχωνο υπερβολοειδές $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

α'. Βρείτε την τομή της $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ με το επίπεδο $x = 1$.

β'. Δείξτε ότι από κάθε σημείο της S περνάνε δύο ευθείες που βρίσκονται πάνω στην S , και βρείτε τις παραμετρικές εκφράσεις τους.

Υποδείξεις: (Γεωμετρική προσέγγιση:) Περιστρέψτε γύρω από τον z -άξονα το σύνολο που βρήκατε στο (α') ή (αλγεβρική προσέγγιση) θεωρήστε ευθεία από σημείο της S και προσδιορίστε το διάνυσμα διεύθυνσης $(a, b, 1)$ για να ανήκει η ευθεία στην S .

Άσκηση 12.7 Βρείτε παραμετρική περιγραφή του ελλειψοειδούς, χρησιμοποιώντας δύο παραμέτρους φ και ϑ , και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin$, $\cos$, με τρόπο ανάλογο με την παραμέτρηση της σφαίρας από το γεωγραφικό πλάτος και το γεωγραφικό μήκος.