

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 11

Η παραβολή και η σφαίρα.

Άσκηση 11.1 Βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία $F : (3, 0)$ και διευθετούσα $x = -1$.

Άσκηση 11.2 Η εξίσωση της σφαίρας S που περνάει από τα σημεία $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ και $(1, 1, 1)$ δίδεται από την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Αναπτύξτε την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή, για να βρείτε την εξίσωση της σφαίρας στη μορφή

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0.$$

Συμπληρώστε τα τετράγωνα για να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα της σφαίρας.

Άσκηση 11.3 Βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία $F : (0, 3)$ και διευθετούσα $y = 9$.

Άσκηση 11.4 Δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών της παραβολής $y^2 = 2px$ που περνούν από το $(0, 0)$ είναι επίσης παραβολή, με εξίσωση $y^2 = px$.

Άσκηση 11.5 Εάν OP και OQ είναι δύο ορθογώνιες χορδές της παραβολής $y^2 = 2px$, δείξτε ότι οι εφαπτόμενες στα P και Q τέμνονται στην ευθεία $x = -2p$.

Άσκηση 11.6 Δείξτε ότι η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ σε ένα σημείο (x_1, y_1) τέμνει τον x -άξονα στο σημείο $(-x_1, 0)$.

Άσκηση 11.7 Θεωρήστε τη σφαίρα $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ και την οικογένεια παράλληλων επιπέδων $\Pi_t : 2x + y - z = t$. Βρείτε τα t για τα οποία το επίπεδο Π_t εφάπτεται στη σφαίρα S^2 , καθώς και τα αντίστοιχα σημεία επαφής.

Άσκηση 11.8 Βρείτε τη σφαίρα που έχει κέντρο (a, b, c) και εφάπτεται στο επίπεδο $ax + 2by + 3cz = 0$.

Άσκηση 11.9 Μία ευθεία εφάπτεται σε μία σφαίρα όταν έχει μόνον ένα κοινό σημείο με τη σφαίρα. Τότε η απόσταση του κέντρου της σφαίρας από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα της σφαίρας.

Βρείτε τη σφαίρα που έχει κέντρο $(1, 1, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon : (x, y, z) = (t, -t, 0)$.

Άσκηση 11.10 Βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία το σημείο $(2, 1)$ και διευθετούσα την ευθεία $x + y + 1 = 0$.

Άσκηση 11.11 Έστω $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S \setminus \{N\}$, η στερεογραφική παραμέτρηση της σφαίρας S , κέντρου O και ακτίνας r , όπου $N : (0, 0, r)$.

α'. Δείξτε ότι η εικόνα, μέσω της Φ , ενός κύκλου του $\mathbb{R}^2$ είναι το C , όπου C κύκλος του S που δεν περνά από το N .

β'. Δείξτε ότι η εικόνα, μέσω της Φ , μιας ευθείας του $\mathbb{R}^2$ είναι το $C \setminus \{N\}$, όπου C κύκλος του S που περνά από το N .