

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 10

Η έλλειψη και η υπερβολή.

Άσκηση 10.1 Βρείτε την εξίσωση της έλλειψης όταν:

- α'. Είναι συμμετρική ως προς τους άξονες και περνάει από τα σημεία $(0, 40)$ και $(5, 0)$.
- β'. Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα $(6, 0)$ και $(-6, 0)$ είναι 16.
- γ'. Έχει εστίες στα σημεία $(0, 4)$ και $(0, -4)$ και εκκεντρότητα $e = \frac{2}{3}$.

Άσκηση 10.2 Να βρείτε την κανονική εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ της υπερβολής όταν η εκκεντρότητα είναι $\frac{13}{2}$ και ο πραγματικός ημιάξονας a είναι 48.

Άσκηση 10.3 Η ισοσκελής υπερβολή είναι η υπερβολή για την οποία $a = b$. Βρείτε την εκκεντρότητα της ισοσκελούς υπερβολής.

Άσκηση 10.4 Σχεδιάστε ένα πρόχειρο (δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσετε υποχρεωτικά χάρακα και υποδεκάμετρο) αλλά προσεκτικά σχεδιασμένο σχήμα (δηλαδή οι θέσεις των σημείων και οι κλίσεις των ευθειών να είναι σωστές στα όρια ακριβείας του σχήματος) της έλλειψης με εξίσωση

$$x^2 + 4y^2 = 4.$$

Βρείτε τις εστίες της έλλειψης και σημειώστε τις στο σχήμα.

Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία της έλλειψης για τα οποία $x = 1$ και σχεδιάστε τις στο σχήμα.

Άσκηση 10.5 Για να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο αλλά προσεκτικά σχεδιασμένο σχήμα της υπερβολής με εξίσωση

$$x^2 - 2y^2 = 4,$$

πρώτα βρείτε τις εστίες της υπερβολής και σημειώστε τις στο σχήμα.

Κατόπιν βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων προς την υπερβολή, και σχεδιάστε τις στο σχήμα.

Τώρα σχεδιάστε τους δύο κλάδους της υπερβολής.

Βρείτε την εξίσωση των εφαπτομένων στην υπερβολή από το σημείο $(x_1, y_1) = (-1, 2)$.

Κατόπιν βρείτε την εξίσωση κάθε μίας από τις δύο εφαπτόμενες από το (x_1, y_1) και σχεδιάστε τις στο σχήμα.

Το ίδιο για το σημείο $(x_2, y_2) = (1, \frac{1}{2})$. Τί παρατηρείτε;

Άσκηση 10.6 Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ και τα σημεία επαφής, όταν οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες προς την ευθεία $x = y$.

Άσκηση 10.7 Να βρείτε την κανονική εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ της έλλειψης όταν η απόσταση μεταξύ των εστιών της είναι 6 και ο μεγάλος ημιάξονας a είναι 10.

Άσκηση 10.8 Να βρείτε την κανονική εξίσωση της υπερβολής όταν η απόσταση μεταξύ των διευθετούσών είναι $\frac{32}{5}$ και η εκκεντρότητα είναι $e = \frac{5}{4}$.

Άσκηση 10.9 Να βρείτε την κανονική εξίσωση της υπερβολής όταν η γωνία μεταξύ των ασυμπτώτων είναι $\frac{\pi}{3}$ και $c = 2\sqrt{3}$.

Άσκηση 10.10 Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης εάν η απόσταση μεταξύ δύο κορυφών της που ανήκουν σε διαφορετικούς άξονες είναι διπλάσια της απόστασης μεταξύ των εστιών.

Άσκηση 10.11 Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης εάν η απόσταση μεταξύ των διευθετούσών είναι τετραπλάσια της απόστασης μεταξύ των εστιών.

Άσκηση 10.12 Εάν p_1 και p_2 είναι οι αποστάσεις των σημείων $(0, c)$ και $(0, -c)$ από μία εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, όπου $c^2 = a^2 - b^2$, δείξτε ότι $p_1^2 + p_2^2 = 2a^2$.

Υπόδειξη: Προσέξτε ότι τα σημεία $(0, c)$ και $(0, -c)$ δεν είναι οι εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Άσκηση 10.13 Βρείτε τις εξισώσεις των υπερβολών που έχουν ασύμπτωτες τις ευθείες $\varepsilon_1 : 4y = x$ και $\varepsilon_2 : -4y = x$.

Υπόδειξη: Η κλίση των ασυμπτώτων δίδει το λόγο των δύο παραμέτρων a και b της υπερβολής. Μην ξεχάσετε και τις συζυγείς υπερβολές, που έχουν τις ίδιες ασύμπτωτες. Έτσι έχουμε δύο άπειρες οικογένειες υπερβολών.

Άσκηση 10.14 Δείξτε ότι το γινόμενο των αποστάσεων ενός σημείου της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ από τις ασύμπτωτες είναι $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

Άσκηση 10.15 Εάν K είναι η ορθογώνια προβολή της εστίας F σε μία ασύμπτωτη της υπερβολής, δείξτε ότι $|\overrightarrow{OK}| = a$, $|\overrightarrow{FK}| = b$ και ότι το K βρίσκεται στην αντίστοιχη διευθετούσα.