

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 9

Ο κύκλος. Πόλοι και πολικές ευθείες. Δύναμη σημείου ως προς κύκλο.
Δέσμες κύκλων.

Άσκηση 9.1 Αποδείξτε με χρήση αναλυτικής γεωμετρίας την ιδιότητα του κύκλου: η γωνία η εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Άσκηση 9.2 Βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, -2)$, $(5, -4)$, $(4, -3)$.

Άσκηση 9.3 Βρείτε την εφαπτομένη στο σημείο $(1, -2)$ του κύκλου που περνάει από τα σημεία $(1, -2)$, $(5, -4)$, $(4, -3)$.

Άσκηση 9.4 Βρείτε τη συνθήκη ώστε οι κύκλοι με εξισώσεις

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

να εφάπτονται εσωτερικά ή να εφάπτονται εξωτερικά.

Άσκηση 9.5 Βρείτε την πολική ευθεία του σημείου $(3, 5)$ ως προς τον κύκλο που εφάπτεται στους άξονες στα σημεία $(2, 0)$ και $(0, 2)$.

Άσκηση 9.6 Βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο την κοινή χορδή των κύκλων $x^2 + y^2 - 4y = 30$ και $x^2 + y^2 + 4x = 46$.

Άσκηση 9.7 Βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων που περνούν από τα σημεία $(2, 3)$ και $(-1, 6)$ και εφάπτονται στον x -άξονα.

Άσκηση 9.8 Βρείτε την ακτίνα του κύκλου που περνάει από το σημείο αναφοράς και εφάπτεται στην ευθεία $3x - y = 5$ στο σημείο $(2, 1)$.

Άσκηση 9.9 Βρείτε την εξίσωση της δέσμης κύκλων που περιέχει τον κύκλο $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ και έχει ριζικό άξονα $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Άσκηση 9.10 Δείξτε ότι οι κύκλοι με εξίσωση $x^2 + y^2 + 2\lambda x = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ αποτελούν δέσμη κύκλων που εφάπτονται σε ένα σημείο

Άσκηση 9.11 Δείξτε ότι οι πολικές ευθείες του σημείου (x_1, y_1) ως προς τους κύκλους της δέσμης της Άσκησης 9.10 περνούν από το σημείο $(-x_1, \frac{x_1^2}{y_1})$.