

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 4

Επίπεδο στο χώρο. Ευθεία στο χώρο.

Πριν ασχοληθείτε με τις επόμενες Ασκήσεις, βεβαιωθείτε ότι έχετε αποσαφηνίσει όλες σας τις απορίες σχετικά με τις Δραστηριότητες 2.9 έως 2.17.

Για τις επόμενες 3 ερωτήσεις, δίδονται τα σημεία
 $P : (2, 3, 1)$, $Q : (3, 1, 4)$ και $R : (2, 1, 5)$.

Άσκηση 4.1 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία P , Q , R .

Άσκηση 4.2 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το σημείο P και είναι κάθετο στην ευθεία QR . Είναι το επίπεδο παράλληλο προς κάποιον άξονα συντεταγμένων;

Άσκηση 4.3 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου Π_s που περιέχει την ευθεία QR και τέμνει τον άξονα Oy στο σημείο $(0, s, 0)$, για $s \in \mathbb{R}$,

Άσκηση 4.4 Βρείτε δύο εξισώσεις της μορφής $Ax + By + Cz + D = 0$ που αποτελούν (και οι δύο μαζί!) την αναλυτική περιγραφή της ευθείας ε στο χώρο, που έχει παραμετρική περιγραφή

$$(x, y, z) = (3, 7, -6) + t(5, -4, 1).$$

Άσκηση 4.5 Έστω ε η ευθεία στο χώρο με παραμετρική περιγραφή

$$(x, y, z) = (2 + 2t, 2, 2 - 2t)$$

Θεωρήστε τις ευθείες

$$\delta_1 : (x, y, z) = (1, -1, 0) + r(1, 1, 0) \quad \text{και} \quad \delta_2 : (x, y, z) = (1, -1, 1) + s(-4, 0, 4).$$

Για $i = 1, 2$, να εξετάσετε αν η ε και η δ_i , έχουν κοινά σημεία, είναι παράλληλες ή είναι ασύμβατες.

Άσκηση 4.6 Εξετάστε εάν η ευθεία ε με παραμετρική περιγραφή $(x, y, z) = (3, -1, 4) + t(2, 5, 2)$ είναι παράλληλη προς το επίπεδο $\Pi : 2x - 2y + 3z - 5 = 0$. Εάν όχι, βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής.

Άσκηση 4.7 Βρείτε την παραμετρική παράσταση της κοινής καθέτου των ευθειών $\varepsilon_1 : (x, y, z) = (1, 3, 1) + s(1, 1, -1)$ και $\varepsilon_2 : (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, 0, -2)$. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών.

Άσκηση 4.8 Έστω Π το επίπεδο με παραμετρική περιγραφή

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + s(1, 2, 3) + t(1, 1, 1).$$

Βρείτε την εξίσωση του Π , με δύο τρόπους:

α'. απαλείφοντας πρώτα την παράμετρο t και κατόπιν την παράμετρο s .

β'. χρησιμοποιώντας το εξωτερικό γινόμενο.

Ελέγξτε ότι οι δύο διαδικασίες καταλήγουν σε ισοδύναμες εξισώσεις.

Άσκηση 4.9 Θεωρούμε το επίπεδο Π στο E^3 που περνάει από τα σημεία $Q : (2, 1, 3)$, $R : (2, 4, 0)$ και $S : (-3, 0, 4)$. Στο επίπεδο Π ορίζουμε το (μη ορθοκανονικό) σύστημα αναφοράς $(Q, \vec{v}, \vec{w})$, όπου $\vec{v} = \overrightarrow{QR}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{QS}$. Να βρείτε:

α'. Τις συντεταγμένες στο E^3 του σημείου του Π που έχει συντεταγμένες $(5, 3)$ ως προς το $(Q, \vec{v}, \vec{w})$.

β'. Τις συντεταγμένες ως προς το $(Q, \vec{v}, \vec{w})$ του σημείου στο οποίο το επίπεδο Π τέμνει τον άξονα Oz .

Άσκηση 4.10 Θεωρήστε το επίπεδο Π με εξίσωση $2x + 3y + z + 1 = 0$, και τα επίπεδα $\Sigma_1: x + y + z + 1 = 0$ και $\Sigma_2: -4x - 6y - 2z - 2 = 0$.

α'. Βρείτε μία παραμετρική περιγραφή του συνόλου των κοινών σημείων του Π και του Σ_1 και του συνόλου των κοινών σημείων του Π και του Σ_2 .

β'. Υπολογίστε την απόσταση του σημείου $(1, 1, 1)$ από το επίπεδο Π , και την απόσταση του σημείου $(1, 1, 1)$ από την τομή των επιπέδων Π και Σ_1 .