

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδια Προβλημάτων 3

Ευθείες στο Επίπεδο, Διανύσματα στο χώρο.

Πριν ασχοληθείτε με τις επόμενες Ασκήσεις, βεβαιωθείτε ότι έχετε αποσαφηνίσει όλες σας τις απορίες σχετικά με τις Δραστηριότητες 1.30 έως 1.35.

Άσκηση 3.1 Περιγράψτε γεωμετρικά τα ακόλουθα σύνολα στο επίπεδο

$$\begin{aligned}\alpha') & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y + \sqrt{2} = 0\} \\ \beta') & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\} \\ \gamma') & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y - 1)(2x - y) = 0\} \\ \delta') & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0\}\end{aligned}$$

Άσκηση 3.2 Θεωρήστε την ευθεία ε_t που περνάει από τα σημεία $P : (3, 2)$ και $Q_t : (t, 4)$ για $t \in \mathbb{R}$.

α'. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_t .

β'. Για ποιά τιμή του t είναι η ευθεία ε_t κάθετη στην ευθεία $\zeta : 2x - y + 5 = 0$;

γ'. Βρείτε την τιμή t_0 για την οποία η ευθεία ε_{t_0} είναι παράλληλη προς την ζ .

δ'. Για $t \neq t_0$, βρείτε το σημείο τομής της ε_t με την ζ .

Άσκηση 3.3 Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $2x + 3y + 5 = 0$ και μαζί με τους άξονες του συστήματος αναφοράς περικλείουν τρίγωνο με εμβαδόν 6.

Άσκηση 3.4 Σχεδιάστε τις ευθείες με τις ακόλουθες εξισώσεις ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{array}{ll}\alpha') & 2x + 3y + 6 = 0 \\ \beta') & 2x + 3y - 6 = 0 \\ \gamma') & 3x - 2y + 6 = 0 \\ \delta') & 3x - 2y - 6 = 0\end{array}$$

Άσκηση 3.5 Βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα, ένα διάνυσμα διεύθυνσης και την κλίση, για την ευθεία ε στο επίπεδο με παραμετρική περιγραφή $(x, y) = (1 - 2t, 3 + t)$. Γράψτε την εξίσωση της ευθείας ε .

Άσκηση 3.6 Βρείτε το ύψος από το A του τριγώνου ABC , με $A : (-1, 3)$, $B : (1, -1)$, $C : (4, 1)$.

Πριν ασχοληθείτε με τις επόμενες Ασκήσεις, βεβαιωθείτε ότι έχετε αποσαφηνίσει όλες σας τις απορίες σχετικά με τις Δραστηριότητες 2.1 έως 2.8.

Άσκηση 3.7 Σχεδιάστε τρία διανύσματα $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$ που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Συμπληρώστε στο σχέδιο το παραλληλεπίπεδο που κατασκευάζεται με ακμές AB , AC και AD (προσέξτε να μην δείχνει ορθογώνιο) έτσι ώστε AA' , BB' , CC' και DD' να είναι οι διαγώνιοι του παραλληλεπιπέδου.

Εκφράστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{AD'}$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{x}$, $\vec{y}$ και $\vec{z}$.

Άσκηση 3.8 Σχεδιάστε ένα κανονικό τετράεδρο $ABCD$ με μήκος πλευράς 1, και θεωρήστε τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Ποιές από τις ακόλουθες τριάδες είναι δεξιόστροφες, και ποιές δεν είναι;

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}), \quad (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}), \quad (\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}), \quad (\vec{w}, -\vec{v}, \vec{u}).$$

Άσκηση 3.9 Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ με κοινό σημείο εφαρμογής O . Δείξτε ότι $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα εάν και μόνον εάν $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} > 0$.

Άσκηση 3.10 Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} [\vec{x} \vec{y} \vec{z}] &= [\vec{y} \vec{z} \vec{x}] = [\vec{z} \vec{x} \vec{y}], \\ [\vec{z} \vec{y} \vec{x}] &= [\vec{y} \vec{x} \vec{z}] = [\vec{x} \vec{z} \vec{y}]. \end{aligned}$$

Άσκηση 3.11 Εάν $\vec{a} \neq 0$ και $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{a}) \times \vec{b}$, τί συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για το $\vec{b}$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 3.12 Υπολογίστε το εξωτερικό γινόμενο $\vec{v} \times \vec{u}$ των διανυσμάτων (με συντεταγμένες ως προς ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς) $\vec{v} = (1, 2, 1)$, $\vec{u} = (3, 1, 2)$.

Εξετάστε αν τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{u}$ και $\vec{w} = (4, 5, 0)$ είναι συνεπίπεδα.

Άσκηση 3.13 Έστω ορθοκανονικό σύστημα του χώρου $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Να βρεθεί ένα άλλο σύστημα του χώρου $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, με $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, τέτοιο ώστε τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ να είναι ορθογώνια ανά δύο.

Άσκηση 3.14 Για το εξωτερικό γινόμενο δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα: $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ δεν είναι πάντα ίσο με $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$. Υπάρχει όμως μία άλλη σχέση, η **ταυτότητα Jacobi**.

Δείξτε ότι, για τυχαία διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ στο χώρο,

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) = \vec{0}.$$