

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 12

Παραμετρήσεις της σφαίρας,
επιφάνειες εκ περιστροφής και επιφάνειες δευτέρου βαθμού.

Άσκηση 12.1 Βρείτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου με γεωγραφικό πλάτος $\pi/4$ και γεωγραφικό μήκος $-\pi/2$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$(x, y, z) = (0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2).$$

Άσκηση 12.2 Βρείτε τις γεωγραφικές συντεταγμένες του σημείου στη μοναδιαία σφαίρα με καρτεσιανές συντεταγμένες $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\varphi = \pi/4, \vartheta = 2\pi/3.$$

Άσκηση 12.3 Βρείτε την εξίσωση της επιφάνειας που παράγεται κατά την περιστροφή των παρακάτω επίπεδων καμπυλών γύρω από τον άξονα που δίνεται, και περιγράψτε γεωμετρικά την επιφάνεια.

α'. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad \text{άξονας } Ox,$

β'. $x^2 + (y - 1)^2 = 9, \quad z = 0, \quad \text{άξονας } Oy,$

γ'. $y^2 = 4x, \quad z = 0 \quad \text{άξονας } Ox,$

δ'. $xz = 2, \quad y = 0, \quad \text{άξονας } Oz,$

ε'. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad \text{άξονας } x = 6, \quad z = 0,$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. Σφαίρα, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

β'. Σφαίρα, $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9$.

ε'. Θέτουμε $x' = x - 6$. Για να βρούμε την εξίσωση της επιφάνειας εκ περιστροφής με γενέτειρα $(x' + 6)^2 + y^2 = 4$ γύρω από τον άξονα $x' = 0, z = 0$ αντικαθιστούμε $\sqrt{x'^2 + z^2}$

στη θέση του x' και έχουμε $(\sqrt{x'^2 + z + 2} + 6)^2 + y^2 = 4$. Ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς

$$\left(\sqrt{(x-6)^2 + z^2} + 6\right)^2 + y^2 = 4.$$

Άσκηση 12.4 Για τις ακόλουθες εξισώσεις,

α'. ονομάστε την επιφάνεια την οποία παριστάνουν

β'. βρείτε τις εξισώσεις των τομών της επιφάνειας με τα επίπεδα $z = 0$, $x = 0$ και $y = 0$.

γ'. βρείτε τις εξισώσεις των τομών της επιφάνειας με τα επίπεδα $z = 4$, $x = 4$ και $y = 4$.

i. $9x^2 + 4z^2 = 36y$

ii. $x^2 + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$

iii. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$

iv. $4y^2 + 4z^2 - x^2 = 0$

Απάντηση - Υπόδειξη.

i. Ελλειπτικό παραβολοειδές. Η τομή με το $z = 0$ είναι $9x^2 = 36y$, $z = 0$, παραβολή. Η τομή με το $y = 0$ είναι $9x^2 + 4z^2 = 0$, $y = 0$, το σημείο $(0, 0, 0)$. Η τομή με το $x = 0$ είναι παραβολή. Η τομή με το $z = 4$ είναι $9x^2 + 64 = 36y$, $z = 4$, παραβολή. Η τομή με το $x = 4$ είναι παραβολή. Η τομή με το $y = 4$ είναι έλλειψη.

ii. Ελλειψοειδές. Η τομή με το $x = 4$ είναι το κενό σύνολο.

iii. Μονόχωνο υπερβολοειδές. Η τομή με το $x = 4$ είναι υπερβολή. Η τομή με το $y = 4$ είναι $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 0$, $y = 4$, δύο τεμνόμενες ευθείες.

iv. Κώνος εκ περιστροφής, με άξονα τον x -άξονα και γενέτειρα $x = 2z$. Η τομή με το $x = 4$ είναι έλλειψη. Η τομή με το $y = 4$ είναι υπερβολή.

Άσκηση 12.5 Φέρετε τις ακόλουθες εξισώσεις σε κανονική μορφή συμπληρώνοντας τα τετράγωνα, ονομάστε τις επιφάνειες που παριστάνουν και βρείτε το κέντρο ή την κορυφή τους:

α'. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8 = 0$

β'. $2x^2 + y^2 - 4z^2 + 4z - 6y - 2 = 0$

γ'. $y^2 + x^2 - 4z^2 = 2x + 8z$

δ'. $x^2 + z^2 - 4x - y - 5 = 0$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 21$, σφαίρα.

β'. $2x^2 + (y - 3)^2 - 4(z - \frac{1}{2})^2 = 10$, μονόχωνο υπερβολοειδές.

γ'. δίχωνο υπερβολοειδές, εκ περιστροφής.

δ'. παραβολοειδές, εκ περιστροφής.

Άσκηση 12.6 Θεωρήστε το μονόχωνο υπερβολοειδές $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

α'. Βρείτε την τομή της $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ με το επίπεδο $x = 1$.

β'. Δείξτε ότι από κάθε σημείο της S περνάνε δύο ευθείες που βρίσκονται πάνω στην S , και βρείτε τις παραμετρικές εκφράσεις τους.

Υποδείξεις: (Γεωμετρική προσέγγιση:) Περιστρέψτε γύρω από τον z -άξονα το σύνολο που βρήκατε στο (α') ή (αλγεβρική προσέγγιση:) Θεωρήστε ευθεία από σημείο της S και προσδιορίστε το διάνυσμα διεύθυνσης $(a, b, 1)$ για να ανήκει η ευθεία στην S .

Απάντηση - Υπόδειξη.

1. Δύο τεμνόμενες ευθείες, με εξισώσεις $y \pm z = 0, x = 1$.

2. Περιστρέφοντας κάθε μία από τις δύο ευθείες στο 1 γύρω από τον z -άξονα, καλύπτεται όλη η επιφάνεια του μονόχωνου υπερβολοειδούς εκ περιστροφής.

Για να βρούμε τις ευθείες χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τη συμμετρία της συγκεκριμένης επιφάνειας, εξετάζουμε τις ευθείες που περνούν από το γενικό σημείο (x_0, y_0, z_0) της επιφάνειας και σχηματίζουν γωνία $\pi/4$ με το επίπεδο $z = 0$. Αυτές διάνυσμα διεύθυνσης της μορφής $(1, s, \sqrt{1+s^2})$, και έχουν παραμετρική παράσταση $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(1, s, \sqrt{1+s^2})$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της επιφάνειας και βρίσκουμε τα s για τα οποία ολόκληρη η ευθεία βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια.

Άσκηση 12.7 Βρείτε παραμετρική περιγραφή του ελλειψοειδούς, χρησιμοποιώντας δύο παραμέτρους φ και ϑ , και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin, \cos$, με τρόπο ανάλογο με την παραμέτρηση της σφαίρας από το γεωγραφικό πλάτος και το γεωγραφικό μήκος.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Η παραμέτρηση είναι $(\varphi, \vartheta) \mapsto (a \cos \varphi \cos \vartheta, b \cos \varphi \sin \vartheta, c \sin \varphi)$, για $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi < 2\pi$. Ελέγχουμε ότι το σημείο με αυτές τις συντεταγμένες ικανοποιεί την εξίσωση του ελλειψοειδούς.