

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 11

Η παραβολή και η σφαίρα.

Άσκηση 11.1 Βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία $F : (3, 0)$ και διευθετούσα $x = -1$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
 $y^2 = 8(x - 1)$.

Άσκηση 11.2 Η εξίσωση της σφαίρας S που περνάει από τα σημεία $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ και $(1, 1, 1)$ δίδεται από την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Αναπτύξτε την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή, για να βρείτε την εξίσωση της σφαίρας στη μορφή

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0.$$

Συμπληρώστε τα τετράγωνα για να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα της σφαίρας.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς τη πρώτη γραμμή παίρνετε μία έκφραση της μορφής

$$U(x^2 + y^2 + z^2) + AUx + BUy + cUz + DU = 0.$$

Πρέπει να διαιρέσετε με το U για να βρείτε την εξίσωση στην κανονική μορφή

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0.$$

Συμπληρώνοντας τα τετράγωνα βρίσκουμε ότι η σφαίρα έχει κέντρο $(1/2, 1/2, 1/2)$ και ακτίνα $\sqrt{3}/2$.

Άσκηση 11.3 Βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία $F : (0, 3)$ και διευθετούσα $y = 9$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$-x^2 = 12(y - 6).$$

Άσκηση 11.4 Δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών της παραβολής $y^2 = 2px$ που περνούν από το $(0, 0)$ είναι επίσης παραβολή, με εξίσωση $y^2 = px$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Δηλαδή ότι εάν $(2a, 2b)$ ικανοποιεί την εξίσωση $y^2 = 2px$ τότε (a, b) ικανοποιεί την εξίσωση $y^2 = px$.

Άσκηση 11.5 Εάν OP και OQ είναι δύο ορθογώνιες χορδές της παραβολής $y^2 = 2px$, δείξτε ότι οι εφαπτόμενες στα P και Q τέμνονται στην ευθεία $x = -2p$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Εάν $P : (x_1, y_1)$ τότε $Q : (-ky_1, kx_1)$. Τα δύο σημεία βρίσκονται στην παραβολή, άρα $y_1^2 = 2px_1$ και $k^2x_1^2 = -2kpy_1$. Βρίσκουμε ότι $k = -8p^3/y_1^3$, και $x_2 = 4p^2/x_1$, $y_2 = -4p^2/y_1$. Οι δύο εφαπτόμενες είναι $y_1y = p(x_1 + x)$ και $-4p^2y/y_1 = p(x + 4p^2/x_1)$. Επαληθεύουμε ότι οι δύο ευθείες τέμνονται στην ευθεία $x = -2p$.

Άσκηση 11.6 Δείξτε ότι η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ σε ένα σημείο (x_1, y_1) τέμνει τον x -άξονα στο σημείο $(-x_1, 0)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο $P_0 : (x_0, y_0)$ είναι $y_0y = p(x + x_0)$. Όταν $y = 0$, $x = -x_0$.

Άσκηση 11.7 Θεωρήστε τη σφαίρα $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ και την οικογένεια παράλληλων επιπέδων $\Pi_t : 2x + y - z = t$. Βρείτε τα t για τα οποία το επίπεδο Π_t εφάπτεται στη σφαίρα S^2 , καθώς και τα αντίστοιχα σημεία επαφής.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Εάν $X_0 : (x_0, y_0, z_0)$ είναι το σημείο επαφής, το διάνυσμα $\overrightarrow{OX}$ είναι η ακτίνα της σφαίρας, και είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο. Άρα $\overrightarrow{OX} = \lambda(2, 1, -1)$. Αφού $|\overrightarrow{OX}| = 1$, $\lambda = \pm 1/\sqrt{6}$. Τα σημεία επαφής είναι $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1)$, και $t = \pm\sqrt{6}$.

Άσκηση 11.8 Βρείτε τη σφαίρα που έχει κέντρο (a, b, c) και εφάπτεται στο επίπεδο $ax + 2by + 3cz = 0$.

Άσκηση 11.9 Μία ευθεία εφάπτεται σε μία σφαίρα όταν έχει μόνον ένα κοινό σημείο με τη σφαίρα. Τότε η απόσταση του κέντρου της σφαίρας από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα της σφαίρας.

Βρείτε τη σφαίρα που έχει κέντρο $(1, 1, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon : (x, y, z) = (t, -t, 0)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Η ακτίνα είναι η απόσταση του κέντρου της σφαίρας από την ευθεία, $r = \sqrt{3}$.

Άσκηση 11.10 Βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία το σημείο $(2, 1)$ και διευθε-

τούσα την ευθεία $x + y + 1 = 0$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Η κορυφή της παραβολής είναι στο $Q : (1, 0)$ και η παράμετρος $p = 2\sqrt{2}$. Ως προς το σύστημα αναφοράς $(Q, (\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{2}, (-\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{2})$, η παραβολή έχει εξίσωση $v^2 = 4\sqrt{2}u$.

Η αλλαγή μεταβλητής είναι $x - 1 = (u - v)/\sqrt{2}$ και $y = (u + v)/\sqrt{2}$. Δηλαδή $u = (x - 1 + y)/\sqrt{2}$ και $v = (-x + 1 + y)/\sqrt{2}$. Η εξίσωση είναι

$$(-x + 1 + y)^2 = 8(x - 1 + y).$$

Άσκηση 11.11 Έστω $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S \setminus \{N\}$, η στερεογραφική παραμέτρηση της σφαίρας S , κέντρου O και ακτίνας r , όπου $N : (0, 0, r)$.

α'. Δείξτε ότι η εικόνα, μέσω της Φ , ενός κύκλου του $\mathbb{R}^2$ είναι το C , όπου C κύκλος του S που δεν περνά από το N .

β'. Δείξτε ότι η εικόνα, μέσω της Φ , μιας ευθείας του $\mathbb{R}^2$ είναι το $C \setminus \{N\}$, όπου C κύκλος του S που περνά από το N .